République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Akli Mohand Oulhadj- Bouira
Faculté des Sciences et Sciences Appliquées
Département de Physique

Mémoire

Présenté par: Mlle BOUCHENDOUKA Sarra

Mlle KASRI Fatima Zohra

En vue de l'obtention du diplôme de Master en physique

Option : Physique Théorique

Thème

Cosmologie du modèle de gravité de DGP.

Devant le jury suivant:

Mr MADI Djamel	*Président*	*MCA*	*Université de Bouira*
Mr BENAICHE Salim	*Examinateur*	*MAA*	*Université de Bouira*
Mme BOUCHEMLA Nadjema	*Examinateur*	*MAA*	*Université de Bouira*
Mme BOULKROUNE Nassima	*Rapporteur*	*MAA*	*Université de Bouira*

Université Akli Mohand Oulhadj de Bouira, Septembre 2017

Remerciements

On tient d'abord à remercier ceux qui nous ont enseigné et accompagné tout au long de ces cinq années d'étude. On remercie madame Boulkroune Nassima, maître assistante classe A à l'université de Bouira, d'avoir accepter d'être notre promotrice et de nous avoir accordée sa confiance et ses conseils avisés.

Nos sincères remerciements vont aux membres du jury, à monsieur MADI Djamel, maître de conférence à l'université de Bouira, qui nous a fait l'honneur de présider le jury, à monsieur BENAICHE Salim et madame BOUCHEMLA Nadjema, maîtres assistants classe A à l'université de Bouira, qui ont accepté d'examiner ce travail et de participer à notre jury.

Enfin, on souhaiterait remercier nos familles et nos amies qui nous ont accompagné durant ce mémoire, noss parents bien sur qui ont toujours été présents, notamment dans les moments les moins faciles, pour leur encouragement et leur soutien infini dans nos avenir.

Table des matières

Introduction générale

Certain nombre d'observations récentes du $XX°$ siècle suggèrent que notre univers est en expansion accéléré à grande échelle, cela a incité les cosmologistes de proposer des modèles pour expliquer ce phénomène.

Le modèle ΛCDM (Λ cold dark matter) [1] est l'un des modèles les plus simples. Il est basé sur deux ingrédients principales: la constante cosmologique Λ et la matière noire, mais malheureusement ce modèle est insuffisant à cause d'un problème connu sous le nom "problème de la constante cosmologique" qui concerne l'origine de cette dernière.

Il existe actuellement deux directions majeurs qui tentent à résoudre ce problème. En $XIX°$ siècle. L'astronome et mathématicien français Urbain Le Verrier avait établie un modèle de mouvement d'Uranus à partir des lois de la mécanique classique, mais il a trouvé que Uranus se trouvait trop loin par rapport à son orbite calculé, ce désaccord entre le calcul et l'observation a mené à la découverte de Neptune par Le Verrier et il s'est avéré que ce phénomène anormal ne pouvait s'expliquer que par une modification de la théorie de gravité Newtonienne par la théorie de la relativité générale.

Cela conduit la première direction d'essayer de trouver une théorie d'énergie noire acceptable en modifiant les composantes de l'univers pour remplacer la constante cosmologique ou de trouver un nouveau type de densité d'énergie, le consensus commun entre les deux hypothèses est d'utiliser un champs scalaire qui varient au cours du temps.
Par contre, la deuxième direction tentent de résoudre le problème par une modification de la théorie de la relativité générale et la remplacer par une nouvelle théorie de gravité, cette théorie moderne se comporterait comme la théorie de la relativité géénérale dans des échelles plus petites et elle ne se manifestera que sur des échelles à des distances cos-

mologiques.

En 2000, dans le sens de la modification de la gravité, les physiciens Gia Dvali, George Gabadadze et Massimo Porrati ont proposé un modèle intéressant pour résoudre ce dilemme [2].

Après qu'Einstein ait proposé sa théorie de la relativité générale, les physiciens acceptent que notre univers est composé de 4 dimensions (3 spatiales et une dimension temporaire) non pas que 3 dimensions, ce passage vers la théorie d'Einstein a résolu beaucoup de problèmes (comme la lentille gravitationnelle [1] et trou noir).

L'idée d'ajouter des dimensions supplémentaires à notre monde semble d'abord un choc, mais Einstein a montré qu'il est possible avec sa théorie de la relativité générale qu'elle n'est pas limité à 4 dimensions.

Pour construire une cosmologie avec des dimensions supplémentaires, il faut proposer des modèles avec plus de 4 dimensions qui peuvent aider de résoudre certain mystères restants de notre univers en particulier, l'accélération cosmique. ces dimensions vient d'abord de la théorie de Kaluza-Klein [3] qui est une extension de la théorie de la relativité générale à 5 dimensions.
Le sujet à déclenché un intérêt à comprendre des univers à 5 dimensions de différents types et des modèles encore de dimensions plus élevés notamment les modèles de 11 dimensions de la théorie des cordes.
Il existe plusieurs façons de construire une version 5 dimensions du monde. A première vue, la dimension supplémentaire consiste à ajouter une entrée supplémentaire au vecteur colonne de la métrique et la force la plus fondamentale dans ce cas est la force de gravitation, elle se décompose en un taux de $1/r^2$ en 4 dimensions, tendis que en $1/r^3$ dans le cas de 5 dimensions, cela confirme l'idée que la gravité est généralement plus faible dans les dimensions supplémentaires.

Les développement récents dans la théorie des cordes et la théorie M ont suggéré une

1. la lentille gravitationnelle est produit par la présence d'un corps céleste trés massif (amas de galaxie) imprimant un fort champ gravitationnelle entre d'elle capable de dévier les rayons lumineux.

autre approche pour compactifier des dimensions supplémentaires [4], selon lesquels, les particules du modèle standard sont confinées sur une hypersurface appelée brane intégrée dans un espace de dimension supérieure (bulk) où notre univers peut être un tel objet de type brane.

Cette idée d'univers brane était à l'origine relancé dans la théorie des cordes. L'idée des branes qui ont été popularisées par certains modèles cosmologiques sont des objets étendus existent en théorie des cordes, elle possèdent une énergie sous forme de tension [5].
Il existe plusieurs types de brane, on s'intéresse dans notre mémoire au type D-brane [2] sur lesquelles, les cordes ouvertes qui décrivent le secteur non gravitationnelle sont attachéess à leurs extrémités aux branes, tandis que les cordes fermées du secteur de la gravitation peuvent se déplacer librement dans le bulk. Pour prendre un contexte cosmologique, notre univers constituerait à un modèle D3-brane, ces idées peuvent donner lieu à des modèles cosmologiques.

Les premiers modèles de la cosmologie branaire remontent aux travaux de Lisa Rundall et Raman Sundrum [6] en 1999, qui sont motivé par les idées de la théorie M et inspiréé par des travaux de Arkani-Hamed, Dimopoulos et Dvali (ADD). Dans ces modèles, la dimension supplémentaire est déformée et les branes sont des parties d'un espace-temps de Anti-De-Sitter (AdS_5).

Il est récemment suggéré qu'il pourrait exister des dimensions spatiales supplémentaires, pas dans le sens traditionnel de Kaluza -Klein où ces dimensions sont compactifiées pour la détection, mais en un paramètre où les dimensions supplémentaires pourraient être importantes [7]. Sous l'hypothèse que la matière ordinaire est confinée sur un sous-espace tridimensionnel (brane) intégrées dans un espace-temps plus large, il faut avoir une gravité à 5 dimensions acceptable basée sur un mécanisme efficace pour qu'elle soit comporte comme la gravité habituelle à 4 dimensions.

Il existe un moyen pour que la gravité à 5 dimensions évite la détection:

1. rendre la dimension supplémentaire trés petite comme dans le cas du modèle Kaluza-

2. D correspond en mathématique à une condition dite de Dirichlet

Klein, ou déformée comme dans le cas du modèle Randall-Sundrum (RS). Dans ces modèles, en raison de la petite longueur de la dimension supplémentaire, la gravité à 5 dimensions se comporte comme la gravité à 4 dimensions.

2. l'autre solution est de faire cette dimension supplémentaire trés grande, ce qui correspond au modèle DGP, où la $5^{ème}$ dimension est infinie.

A cet égard, les cosmologistes ont également présenté différents modèles (comme modèle DGP) qui ne sont pas entièrement basés sur la théorie des cordes, mais ils utilisent de nombreuses actions en espérant de construire une actions qui ressemble à la gravité 4 dimensions sur des petites échelles (comme l'échelle du système solaire) à fin de résoudre le problème de la constante cosmologique à grande échelle.

Dans notre modèle, en utilise une action supplémentaire à 4 dimensions, où avec laquelle on peut récupérer la gravité à 4 dimensions sur des petites échelles, et qu'elle se décomposera lentement en gravité à 5 dimensions dans les grandes échelles, l'expansion dans ce cas sera plus rapide en raison de la faiblesse de la force de gravité à grande échelle.

CHAPITRE 1

Quelques rappels de la relativité générale et de la cosmologie

Les propriétés de l'univers à grande échelle seront principalement dictées par la force de gravitation. Dnas ce chapitre, on rappele les hypothèses et formules de base de la relativité générale, l'évolution de la structure de l'espace-temps depuis la physique newtonienne jusqu'à la relativité générale, les pricipales définitions des outils mathématiques de la RG, On dérive les équations d'Einstein dictant la dynamique de l'espace-temps et les équations de conservation dictant le comportement de la matière [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18].

1.1 Espace-temps et gravité

1.1.1 Espace et temps absolus de la physique newtonienne

En physique newtonienne, l'espace et le temps sont décrits pas un espace mathématique absolu et immuable. Cet espace est euclidien à trois dimensions. On peut lui assigner une origine et trois axes de référence arbitraires définissant ainsi un repère absolu. Le temps est lui aussi idéal et absolu. Il est indépendant du mouvement et joue le rôle d'un paramètre extérieur.

L'espace étant euclidien, le théorème de Pythagore permet de calculer la distance entre deux point voisins

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \tag{1.1}$$

En coordonnées cartésiennes, On peut réécrire cette distance sous la forme plus compacte

$$dl^2 = \sum_{i=1}^{3} (dx^i)^2 = \sum_{ij} \delta_{ij} dx^i dx^j = \delta_{ij} dx^i dx^j, \tag{1.2}$$

où δ_{ij} est le symbôle de Kronecker (1 si $i = j$ et 0 sinon) et les indices latins $i, j \cdots = 1 \cdots 3$. Cette forme introduit la notation d'Einstein selon laquelle on suppose implicitement une sommation sur tout indice répété.

Exemple

$$\mathbf{T}.\mathbf{V} \equiv \delta_{ij} T^i V^j = T^1 V^1 + T^2 V^2 + T^3 V^3$$

est le produit scalaire de ces deux vecteurs.

Les trajectoires de tout corps est alors donnée sous forme paramétrique par $x^i(t)$, le temps pour aller du point A au point B est indépendant du trajet suivi.

Les lois de la physique ne sont pas nécessairement écrites dans un référentiel cartésien. On peut par exemple utiliser des coordonnées sphériques ou cylindriques si elle sont mieux adaptées au problème donné. Supposons que nous avons un système de coordonnées (y^i) reliées aux coordonnées cartésiennes (x^i) par une relation de la forme $x^i(y^j)$. Le vecteur $\mathbf{dx}$ de coordonnées $\{dx^i\}$ dans le système cartésien a pour coordonnées $dx^i = \dfrac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j$, on en déduit que la distance entre deux points voisins, dans un système quelconque, est

$$dl^2 = g_{ij} dy^i dy^j, \quad g_{ij} = \delta_{lk} \frac{\partial x^l}{\partial y^i} \frac{\partial x^k}{\partial y^j} \tag{1.3}$$

g_{ij} étant la métrique de l'espace. Par exemple, les coordonnées sphériques (r, θ, φ) sont définies par

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \quad y = r \sin\theta \sin\varphi, \quad z = r \cos\theta$$

En applicant (1.3), on en déduit que les seules composantes non nulles de la métrique en coordonnées sphériques sont:

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta$$

L'élément de longueur (1.2) se réécrit donc sous la forme

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 d\varphi^2)$$

1.1.2 Espace-temps de la relativité restreinte

En 1905, Einstein affirma le principe de la relativité retreinte: les lois de la nature devaient avoir la même forme quel que soit le référentiel inertiel [1]. Cela devait en particulier être le cas des équations de Maxwell, ce qui implique que la vitesse de la lumière doit être la même dans tout référentiel inertiel. Le groupe de transformation est celui de Lorentz [2].

1.1.2.1 Espace-temps de Minkowski

La RR postulant qu'aucun observateur inertiel n'est privilégié. La quantité invariante par changement de référentiel inertiel est obtenue en considérant une version pseudo-euclidienne du théorème de Pythagore. L'élément de longueur entre deux évènements de l'espace-temps

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \equiv \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{1.4}$$

1. Un référentiel est dit inretiel est un référentiel où tout corps libre est en mouvement de translation rectiligne uniforme, ou au repos. La vitesse du corps est constante en direction et en norme.

2. Le groupe de Lorentz: un observateur inertiel peut labeller un évènement en considérant un référentiel euclidien rigide lui permettant de déterminer les coordonnées cartésiennes x, y, z. A chaque point de cette grille, il peut placer une horloge synchronisée de telle façon que tout événement est repéré par un quadruplet (t, x, y, z). Un deuxième observateur dans un référentiel inertiel se déplaçant à la vitesse v selon l'axe Ox par rapport au premier peut aussi construire un tel système de coordonnées lui permettant de repérer le même évènement par un autre quadruplet (t', x', y', z'). Les deux jeux de coordonnées sont liés par les transformations de Lorentz

$$\begin{aligned} ct' &= \frac{ct - (v/c)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ x' &= \frac{x - (v/c)ct}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z. \end{aligned}$$

Ces transformations ont la propriété de se réduire aux transformations de Galilée quand $v \ll c$ et de laisser la vitesse de la lumière égale à c dans tout référentiel inertiel.

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z. \end{aligned}$$

avec $x^0 = ct$. Les indices grecs prennent leur valeur entre 0 et 3 et la convention de sommation d'Einstein se généralise à ces valeurs. Contrarement à la métrique euclidienne, ds^2 peut être négatif ou nul pour des évènements non confondus. Dans ce cadre, l'espace et le temps sont unis en un espace-temps, l'espace-temps de Minkowski.

Tout comme dans le cadre newtonien, la métrique (1.4) peut être écrit dans un système de coordoonnées quelconque.

Soit un système de coordonnées $\{y^\mu\}$ relié aux coordonnées minkowskiennes $\{x^\mu\}$ par $\{x^\mu = y^\mu\}$. L'élément de longueuer (1.4) prend la forme

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(y^\lambda)dx^\mu dx^\nu, \quad g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu}\eta_{\alpha\beta} \tag{1.5}$$

D'après le principe de la relativité restriente, les lois de la physique doivent être indépendantes du référentie inertiel choisi.

Exemple Les coordonnées de Rindler sont reliées aux coordonnées minkowskiennes par

$$t = R\sinh T, \quad x = R\cosh T, \quad y = y', \quad z = z'$$

L'élément de longueur (1.5) prend la forme

$$ds^2 = -R^2 dT^2 + dR^2 + dy'^2 + dz'^2 \tag{1.6}$$

1.1.3 Espace-temps courbe de la relativité générale

La relativité restreinte réconcilie la théorie de l'électromangnétisme [3] et le principe de relativité au prix du remplacement du principe de relativité galiléen par le principe de relativité restreinte. Cependant, une nouvelle contradiction apparaît. La théorie de la gravitation newtonienne introduit des actions instantanées à distance, ce qui est incompatible avec la structure causale de la relativité restreinte.

3. Les lois de l'électromangnétisme de Maxwell ont la particularité de ne pas être invariante sous le groupe de Galilée. Par exemple, la force électrique créée par une charge au repos n'est pas invariante puisqu'une force magnétique apparaît dans un référentiel où la source est en mouvement inertiel. D'autre part, Maxwell déduit de ses lois que la lumière est une onde l'électromangnétique dont la vitesse de propagation, c, dépend de la permitivité et de la perméabilité du milieu. On dut introduire un milieu fictif dans lequel ces ondes devaient se propager: l'éther. Les équations de Maxwell ne seraient alors valides que dans ce référentiel particulier identifié avec le repère absolu de Newton. Par un changement de référentiel inertiel la vitesse de la lumière devait donc être mesurée comme $c \pm v$, ce qui ouvrait la possibilité de déterminer le référentiel absolu, celui de l'éther, au prix de l'abandon du principe de relativité galiléenne.

1.1.4 Principe d'équivalence

Einstein va baser son analyse sur le fait qu'en gravitation newtonienne tous les coprs tembent exactement de la même façon dans un champ de gravitation extérieur, indépendamment de leur masse ou de leur composition chimique.
En physique galiléenne newtonienne, cette universalité de la chute libre provient de l'égalité entre la masse grave et la masse inerte.

1.1.4.1 La gravitation comme manifestation de la géométrie

Le principe d'équivalence d'Einstein est à la base de toutes les théories métriques de la gravitation qui incluent entre autres la relativité générale. Il regroupe trois conditions:

i Le principe d'équivalence faible (universalité de la chute libre) selon lequel la trajectoire de tout corps test neutre est indépendant de sa structure interne et de sa composition. Ce corps doit avoir une énergie de liaison gravitationnelle négligeable et être suffisamment petit pour que les inhomogénéités du champ de graviatation puissent être négligées.

ii L'invariance de position locale selon laquelle le résultat de toute expérience non gravitationnelle est indépendante du point de l'espace-temps où l'expérience est effectuée.

iii L'invariance de Lorentz locale selon laquelle le résultat de toute expérience non gravitationnelle est indépendante du mouvement du laboratoire pourvu qu'il soit en chut libre.

On peut argumenter que si le principe d'Einstein est valide alors la gravitation est la manifestation physique d'un espace-temps courbe, c'est-à-dire une théorie métrique. Une telle théorie a les trois propriétés suivantes

– La géométrie de l'espace-temps est décrite par une métrique,

– les corps libres suivent des géodisiques de cette géométrie,

– dans un référentiel local en chute libre, les lois de la physique prennent la forme qu'elles ont dans la théorie de la relativité restreinte.

1.2 Eléments d'analyse tensorielle

1.2.1 Composantes contravariantes et covariantes d'un vecteur

Soit une base quelconque $(\overrightarrow{e}_i)$ d'un espace vectoriel euclidien E_n de dimension n. On appelle composantes contravariantes d'un vecteur $\overrightarrow{A}$ de E_n, les quantités $\{A^i\}$ tel que

$$\overrightarrow{A} = A^i \overrightarrow{e}_i \tag{1.7}$$

et composantes covariantes les quantités $\{A_i\}$ tel que

$$A_i = \overrightarrow{A}.\overrightarrow{e}_i \tag{1.8}$$

ces composantes sont des projections du vecteur $\overrightarrow{A}$ sur les axes portant les vecteurs de base $\overrightarrow{e}_i$.

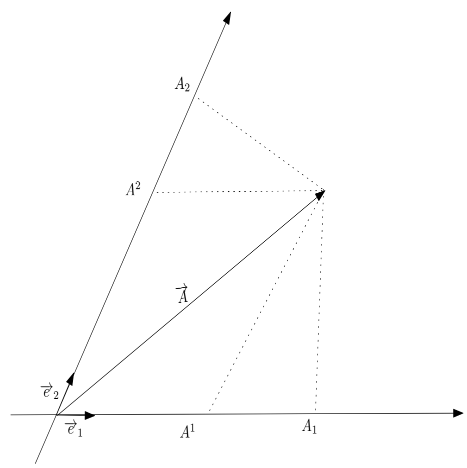

Fig. 1.1 – Coordonnées covaraintes et contravariantes d'un vecteur dans un repère bidimensionnel.

1.2.2 Coordonnées curvilignes

On considère un point M d'un espace vectoriel euclidien et un système de coordonnées $\{x_i\}$. On associe à M un repère naturel en admettant M pour origine et $\{\overrightarrow{e}_i\}$ pour base tel que

$$\overrightarrow{OM} = x^i \overrightarrow{e}_i \tag{1.9}$$

$$\text{et} \quad d\overrightarrow{OM} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x^i} dx^i \tag{1.10}$$

$$\text{or} \quad d\overrightarrow{OM} = dx^i \overrightarrow{e}_i \tag{1.11}$$

$$\text{alors} \quad \overrightarrow{e}_i = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x^i} \tag{1.12}$$

Soient $\{x^i\}$ et $\{x'^i\}$ deux systèmes de coordonnées reliés par

$$x'^i = x'^i(x^j) \quad 1 \leqslant i \leqslant n \tag{1.13}$$

$$\text{et} \quad x^i = x^i(x'^j) \quad 1 \leqslant j \leqslant n \tag{1.14}$$

On a d'une part

$$dx^i = \delta^i_k \; dx^k \tag{1.15}$$

$$dx'^i = \delta^i_k \; dx'^k \tag{1.16}$$

d'autre part d'après (1.13) et (1.14)

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} dx'^j \tag{1.17}$$

$$= \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^j}{\partial x^k} dx^k \tag{1.18}$$

on déduit

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^j}{\partial x^k} = \delta^i_k \tag{1.19}$$

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x'^k} = \delta^i_k \tag{1.20}$$

Si on associe les repères $(M, \overrightarrow{e}_i)$ et $(M, \overrightarrow{e}'_i)$ aux systèmes de coordonnées $\{x^i\}$ et $\{x'^i\}$ respectivement, alors

$$\overrightarrow{e}'_j = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x'^j} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}$$

$$= \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \overrightarrow{e}_i \tag{1.21}$$

$$\text{de même} \quad \overrightarrow{e}_i = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} \overrightarrow{e}'_j \tag{1.22}$$

alors pour un vecteur $\overrightarrow{A}$

$$\overrightarrow{A} = A^i \overrightarrow{e}_i = A'^j \overrightarrow{e}'_j = A'^j \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \overrightarrow{e}_i \tag{1.23}$$

$$\overrightarrow{A} = A'^j \overrightarrow{e}'_j = A^i \overrightarrow{e}_i = A^i \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} \overrightarrow{e}'_j \tag{1.24}$$

on aura les relations de transformation des coordonnées contravariantes du vecteur $\overrightarrow{A}$ lors d'un changement de système de coordonnées

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} A'^j \tag{1.25}$$

$$A'^j = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} A^i \tag{1.26}$$

Quant aux coordonnées covariantes, en tenant compte des relations (1.8) et (1.22), on aura

$$A_i = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} A'_j \tag{1.27}$$

$$A'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} A_j \tag{1.28}$$

1.2.3 Définition d'un tenseur

Un scalaire est un tenseur d'ordre zéro. Un vecteur est un tenseur d'ordre un. On appelle composantes p fois contravariantes et q fois covariantes d'un tenseur mixte d'ordre $p+q$ toute quantité $A^{j_1,\dots,j_p}_{i_1,\dots,i_q}$ se transforment comme le produit de p composantes contravariantes et q composantes covarainte d'un veceteur lors d'un changement de coordonnées $x'^i \longrightarrow x'^i = x'^i(x^j)$, autrement dit

$$A'^{j_1,\dots,j_p}_{i_1,\dots,i_q} = \frac{\partial x'^{j_1}}{\partial x^{k_1}} \cdots \frac{\partial x'^{j_p}}{\partial x^{k_p}} \frac{\partial x^{l_1}}{\partial x'^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{l_q}}{\partial x'^{i_q}} A^{k_1,\dots,k_p}_{l_1,\dots,l_q} \tag{1.29}$$

$$A^{j_1,\dots,j_p}_{i_1,\dots,i_q} = \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x'^{k_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_p}}{\partial x'^{k_p}} \frac{\partial x'^{l_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial x'^{l_q}}{\partial x^{i_q}} A'^{k_1,\dots,k_p}_{l_1,\dots,l_q}, \tag{1.30}$$

un tenseur d'ordre $p+q$ dans un espace à n dimension a n^{p+q} composantes.

Notes

1. La somme de deux tenseurs contravariants a pour composantes les sommes de leurs composantes de mêmes indices, de même pour les composantes covariantes et mixtes des tenseurs.
2. Le produit d'un tenseur par un scalaire est un tenseur dont les composantes sont égales au produit de ses composantes par ce scalaire, ainsi munis des lois d'addition et de multiplication par un scalaire, les tenseurs d'un type donné forment un espace vectoriel.
3. Le produit tensoriel d'un tenseur par un autre permet de former de nouveaux tenseurs. Soit $T_1^{\mu\nu}$ et $T_2^{\lambda\rho}$ les composantes contravariantes respectives des tenseurs T_1

et T_2. La multiplication des composantes entre elles donne les quantités

$$\widetilde{T}^{\mu\nu\lambda\rho} = T_1^{\mu\nu}\ T_2^{\lambda\rho}$$

qui sont les composantes contravariantes d'un nouveau tenseur $\widetilde{T}$.

1.2.4 Contraction des indices

L'opération de contraction des indices consiste, aprés avoir choisi deux indices l'un convariant et l'autre contravariant, à les égaler et sommer par rapport à cet indice deux fois répété.
Le produit scalaire est un cas particulier d'une opération de contraction des indices. On considère deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ de composantes respectives A^i et B_i.
On forme le produit tensoriel de ces deux vecteurs, on obtient le tenseur $T^i_j = A^i\ B_j$. l'application de la règle de contraction des indices, en donnant les mêmes valeurs aux indices i et j, puis on effecte la sommation par rapport à i, on obtient

$$T^i_i = A^i\ B_i = \overrightarrow{A}\ .\ \overrightarrow{B}$$

c'est l'expression du produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$, qui est une grandeur invariante par changement de base.

1.2.5 Tenseur métrique

On considère un système cartésien orthonormé $\{x^{(0)i}\}$ et un système curviligne $\{x^i\}$. Soient $\left(A^{(0)i}, B^{(0)i}\right)$ les composantes contravariantes dans $\{x^{(0)i}\}$ de deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ respectivement et $\left(A^i, B^i\right)$ leur composantes contravariantes dans $\{x^i\}$ respectivement.
D'après (1.25)

$$A^{(0)l} = \frac{\partial x^{(0)l}}{\partial x^i}\ A^i \tag{1.31}$$

$$B^{(0)l} = \frac{\partial x^{(0)l}}{\partial x^i}\ B^i \tag{1.32}$$

comme $\{x^{(0)i}\}$ est un système orthonormée, alors la relation d'orthonormalisation s'écrit

$$\overrightarrow{e}^{(0)}_l\ .\ \overrightarrow{e}^{(0)}_k = \delta_{lk} \tag{1.33}$$

le produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ est

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A}\ .\ \overrightarrow{B} &= A^{(0)l}\ B^{(0)k}\ \overrightarrow{e}_l^{(0)}\ .\ \overrightarrow{e}_k^{(0)} \\ &= A^{(0)l}\ B^{(0)k}\ \delta_{lk} \\ &= \delta_{lk}\ \frac{\partial x^{(0)l}}{\partial x^i}\ A^i\ \frac{\partial x^{(0)k}}{\partial x^j}\ B^j\end{aligned}$$

On introduit la quantité

$$g_{ij} = \delta_{lk}\ \frac{\partial x^{(0)l}}{\partial x^i}\ \frac{\partial x^{(0)k}}{\partial x^j} \tag{1.34}$$

alors

$$\overrightarrow{A}\ .\ \overrightarrow{B} = g_{ij}\ A^i\ B^j \tag{1.35}$$

$$\text{comme}\ \overrightarrow{A}\ .\ \overrightarrow{B} = A^i\ B^j\ \overrightarrow{e}_i\ .\ \overrightarrow{e}_j$$

$$\text{alors}\ g_{ij} = \overrightarrow{e}_i\ .\ \overrightarrow{e}_j \tag{1.36}$$

g_{ij} forme les composantes d'un tenseur d'ordre deux, appelé **tenseur métrique**[4].

Un espace est dit "a une métrique" si on possède un moyen de mesurer l'intervalle séparant deux points infiniment voisins. On appelle le vecteur ds un segment de droite orienté séparant deux points sinfiniment voisins

$$ds = dx^i \overrightarrow{e}_i \tag{1.37}$$

or

$$ds = \frac{\partial s}{\partial x^i} dx^i\ \text{ alors} \tag{1.38}$$

$$\overrightarrow{e}_i = \frac{\partial s}{\partial x^i} = \partial_i s \tag{1.39}$$

1.2.5.1 La forme quadratique fondamentale

L'intervalle qui sépare deux point infiniment voisins dans la base cartésienne $\{x^{(0)i}\}$, noté, ds^2, est tel que

$$ds^2 = ds\ .\ ds = g_{ij}\ dx^i\ dx^j. \tag{1.40}$$

4. Par analogie, le tenseur métrique associé à une base orthonormée est δ_{ij}, le symbole de Kroneker. Le tenseur métrique est symétrique, $g_{ij} = g_{ji}$, du fait que le produit scalaire de deux vecteurs est commutatif.

En effet

$$\begin{aligned}
ds^2 &= (dx^{(0)1})^2 + (dx^{(0)2})^2 + \cdots + (dx^{(0)n})^2 \\
&= \delta_{lk}\ dx^{(0)l}\ dx^{(0)k} \\
&= \delta_{lk}\ \frac{\partial x^{(0)l}}{\partial x^i}\ dx^i\ \frac{\partial x^{(0)k}}{\partial x^j}\ dx^j \\
&= \delta_{lk}\ \frac{\partial x^{(0)l}}{\partial x^i}\ \frac{\partial x^{(0)k}}{\partial x^j}\ dx^i\ dx^j \\
&= g_{ij}\ dx^i\ dx^j
\end{aligned}$$

1.2.5.2 Passage entre composantes covariantes et contravariantes

On constate, en tenant compte des relations (1.8), (1.7) et (1.103), que le passage de composantes covaraites aux composantes contravariantes d'un vecteur est donné par

$$A_i = g_{ij}\ A^j \tag{1.41}$$

On note G la matrice a composantes les composantes du tenseur métrique, $G = (g_{ij})$. On défini g^{ij} les éléments de la matrice inverse, $G^{-1} = (g^{ij})$, alors $g_{il}\ g^{lj} = \delta_i^j$. De (1.41)

$$\begin{aligned}
g^{ki}\ A_i &= g^{ki}\ g_{ij}\ A^j = \delta_j^k\ A^j = A^k \\
A^k &= g^{ki}\ A_i \qquad (1.42)
\end{aligned}$$

On généralise les relations (1.41) et (1.42), on écrit

$$A^{i_1 \dots i_p} = g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_p j_p}\ A_{j_1 \dots j_p} \tag{1.43}$$

$$A_{i_1 \dots i_p} = g_{i_1 j_1} \cdots g_{i_p j_p}\ A^{j_1 \dots j_p} \tag{1.44}$$

1.2.6 Tenseurs particuliers

Mis à part les scalaires, il existe trois tenseurs remarquables

1.2.6.1 Tenseur nul

Un tenseur est dit nul si toutes ses composantes sont nulles.

1.2.6.2 Tenseur de Minkowski

Le tenseur de Minkowski, noté $\eta_{\mu\nu}$ avec $\mu = \overline{0,3}$, $\nu = \overline{0,3}$, est le tenseur métrique d'un espace quadridiemnsionnel décrivant l'espace-temps plat. Il est donné par

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{cases} -1 \quad \text{si} \quad \mu = \nu = 0 \quad , \\ 1 \quad \text{si} \quad \mu = \nu \neq 0 \quad , \\ 0 \quad \text{si} \quad \alpha \neq \beta, \end{cases}$$

l'intervalle ds^2 s'écrit alors

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + dx^i dx^i \tag{1.45}$$

1.2.6.3 Tenseur de Levi-civita

c'est un tenseur de rang N dans un espace à N dimensions,complètement antisymétrique et qui change de signe pour une permutation de deux indices.
Les composantes covariantes dans un espace à quatre dimensions par exemple sont définies par:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \epsilon(e_\alpha \; e_\beta \; e_\gamma \; e_\delta) = \begin{cases} 1 \;\; \text{pour une permutation paire de 0.1.2.3,} \\ -1 \;\; \text{pour une permutation impaire de 0.1.2.3,} \\ 0 \;\; \text{autrement.} \end{cases}$$

La composante covariante du tenseur de Levi-civita est de signe opposé à la composante contravariante:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{1.46}$$

1.3 Les symbôles de Christoffel

Soient M et M' deux points infiniment voisin qu'on associe les deux repères naturels $(M, \overrightarrow{e}_i)$ et $(M', \overrightarrow{e}'_i)$.
On écrit

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + d\overrightarrow{OM} \tag{1.47}$$

$$(M', \overrightarrow{e}'_i) = (M', \overrightarrow{e}_i + d\overrightarrow{e}_i) \tag{1.48}$$

$$d\overrightarrow{e}_i = \frac{\partial \overrightarrow{e}_i}{\partial x^k} dx^k \equiv \partial_k \overrightarrow{e}_i \; dx^k = \Gamma^j_{ik} \; dx^k \; \overrightarrow{e}_j \tag{1.49}$$

de (1.103) on constate que les symbôles de Christoffel[5] s'écrivent en fonction du tenseur métrique comme suit

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{km} \Big(\partial_i g_{mj} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij} \Big) \tag{1.50}$$

En fonction des coordonnées, ils s'écrivent[6]

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{(0)l}} \frac{\partial x^{(0)l}}{\partial x^i \partial x^j} \tag{1.51}$$

1.4 La dérivée covariante

Soit un tenseur défini en tout point d'un espace à N dimension muni d'une base $\{\overrightarrow{e}_i\}$. Si l'espace est plat, la direction des vecteurs de base est toujours la même et l'opération de dérivation n'affecte pas la direction de ces vecteurs. Par contre si l'espace est courbe, la direction des vecteurs $\overrightarrow{e}_i$ change quand on passe d'un point x^i à un point infiniment voisin $x^i + dx^i$, une telle dérivation dite dérivation covariante. Donc la dérivation d'un tenseur affecte la direction des vecteurs de base et fait que la dérivée d'un vecteur n'est plus un vecteur.

La dérivée covariante d'un vecteur contravariant A^i est donnée par

$$\begin{aligned} DA^i &= D_j\ A^i\ dx^j \\ &\equiv A^i{}_{;j}\ dx^j \\ &= (\partial_j A^i + \Gamma^i_{jk}\ A^k)\ dx^j \\ DA^i &= (A^i{}_{,j} + \Gamma^i_{jk}\ A^k)\ dx^j \end{aligned} \tag{1.52}$$

La dérivée covariante d'un vecteur covariant A_i est donnée par

$$\begin{aligned} DA_i &= D_j\ A_i\ dx^j \\ &= (\partial_j A_i - \Gamma^k_{ji}\ A_k)\ dx^j \end{aligned} \tag{1.53}$$

La dérivée covariante d'un tenseur cotravariant T^{ij} est donnée par

$$\begin{aligned} DT^{ij} &= D_k\ T^{ij}\ dx^k \\ &= (\partial_k T^{ij} + \Gamma^i_{kl}\ T^{lj} + \Gamma^j_{kl}\ T^{jl})\ dx^k \end{aligned} \tag{1.54}$$

5. Les symbôles de Christoffel ne sont pas des tenseurs car ils n'obéissent pas à la loi de transformation tensorielle, mais on définit les symbôles de Christoffel de 1ère espèce ,$\Gamma_{ij,m}$ tel que $\Gamma^k_{ij} = g^{km}\Gamma_{ij,m}$.

6. Les symbôles de Christoffel sont symétriques par rapport aux indices du bas,$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

La dérivée covariante d'un tenseur covariant T_{ij} est donnée par

$$\begin{aligned} DT_{ij} &= D_k \, T_{ij} \, dx^k \\ &= (\partial_k T_{ij} - \Gamma^l_{ki} \, T_{lj} - \Gamma^l_{kj} \, T_{il}) \, dx^k \end{aligned} \tag{1.55}$$

La dérivée covariante d'un tenseur mixte T_i^j est donnée par

$$\begin{aligned} DT_i^j &= D_k \, T_i^j \, dx^k \\ &= (\partial_k T_i^j + \Gamma^j_{kl} \, T_i^l - \Gamma^l_{ki} \, T_l^j) \, dx^k \end{aligned} \tag{1.56}$$

L'application de la dérivée covarainte au tenseur métrique g_{ij} donne le théorème de Ricci

$$D_k \, g_{ij} = 0 \tag{1.57}$$

$$D_k \, g^{ij} = 0 \tag{1.58}$$

1.5 Opérateurs différentiels

1.5.1 Le gradiant

Le gradiant, ∇_i, d'un scalaire S est un vecteur donné par

$$\nabla_i S = S_{\,;\,i} = \partial_i \, S = S_{\,,\,i} \tag{1.59}$$

1.5.2 Le rotationnel

Le rotationnel d'un vecteur est un tenseur donné par

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{rot} V)_{ij} &= \nabla_i V_j - \nabla_j V_i \\ &= V_{j\,;\,i} - V_{i\,;\,j} \\ &= \partial_i V_j - \partial_j V_i \end{aligned} \tag{1.60}$$

1.5.3 La divergence

1.5.3.1 La divergence d'un vecteur contravariant $\nabla_i V^i$

La divergence est l'application du gradiant au vecteur, à savoir

$$\begin{aligned}\nabla_i\, V^i &= V^i{}_{;i} = \frac{\partial V^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ij}\, V^j \\ &= \partial_i V^i + \Big(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^i}\Big)\, V^i \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}\, \frac{\partial}{\partial x^i}\, (\sqrt{g}\; V^i) = \frac{1}{\sqrt{g}}\, \partial_i\, (\sqrt{g}\; V^i) \end{aligned} \tag{1.61}$$

1.5.3.2 La divergence d'un vecteur covariant $\nabla_i\, V_i$

De même

$$\begin{aligned}\nabla_i\, V_i &= V_{i\,;\,i} = \frac{\partial V_i}{\partial x^i} - \Gamma^i_{ij}\, V_j \\ &= \partial_i V_i - \Big(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^i}\Big)\, V_i \end{aligned} \tag{1.62}$$

1.5.3.3 La divergence d'un tenseur

De façon analogue

$$\begin{aligned}\nabla_i\, T^{ij} &= T^{ij}_{\ ;i} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ik}\, T^{kj} + \Gamma^j_{ik}\, T^{ik} \\ &= \partial_i T^{ij} + (\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{g})\, T^{ij} + \Gamma^j_{ik}\, T^{ik} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}\, \partial_i(\sqrt{g}\; T^{ij}) + \Gamma^j_{ik}\, T^{ik} \end{aligned} \tag{1.63}$$

Du fait que les symbôles de Christoffel sont symétriques, on écrit

$$\nabla_i\, T^{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}}\, \partial_i\Big(\sqrt{g}\; T^{ij}\Big) + \frac{1}{2}\Gamma^j_{kl}\, (T^{kl} + T^{lk}) \tag{1.64}$$

Pour un tenseur antisymétrique, $A^{ij} = -A^{ji}$, le dernier terme s'annule, on écrit

$$\nabla_i\, A^{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}}\, \partial_i\Big(\sqrt{g}\; A^{ij}\Big) \tag{1.65}$$

Pour un tenseur mixte T^i_j

$$\nabla_i\, T^i_j = \frac{1}{\sqrt{g}}\, \partial_i\Big(\sqrt{g}\; T^i_j\Big) - T^i_l \Gamma^l_{ij} \tag{1.66}$$

1.5.4 D'alembertien

Si la composante A_i d'un tenseur est la dérivée d'une fonction ϕ scalaire

$$A_i = \partial_i \phi \tag{1.67}$$

L'action du tenseur métrique donne sa composante contravariante

$$A^j = g^{ij}\ A_i = g^{ij}\ \partial_i \phi = \partial^j \phi \tag{1.68}$$

On définit le D'Alembertien par

$$\nabla_i\ \nabla^i \phi = \nabla_i\ \partial^i \phi \tag{1.69}$$

car $\nabla^i \phi = \partial^i \phi$

$$\nabla_i\ \nabla^i \phi = \nabla_i\ \partial^i \phi = \frac{1}{\sqrt{g}}\ \partial_i(\sqrt{g}\ g^{ij}\ \partial_j \phi) = \Box\ \phi \tag{1.70}$$

Une fonction ϕ est dit harmonique si $\Box \phi = 0$.

1.6 Tenseur de courbure

1.6.1 Tenseur de Riemann-Christoffel

Il est définit par

$$R_i{}^j{}_{kl} A_j = \nabla_l \nabla_k A_i - \nabla_k \nabla_l A_i \tag{1.71}$$

ce qui donné l'expression suivante

$$R_k{}^i{}_{ml} = \partial_l \Gamma^i_{km} - \partial_m \Gamma^i_{kl} + \Gamma^p_{km} \Gamma^i_{pl} - \Gamma^p_{kl} \Gamma^i_{pm} \tag{1.72}$$

On définit les composantes covaraintes $R_{ki\ \ ml} = g_{pi} R_k{}^p{}_{lm}$

Propriétés du tenseur de courbure

1. Symétrique: $R_{ki\ \ lm} = R_{lm\ \ ki}$
2. Antisymétrique: $R_{ki\ \ lm} = -R_{ik\ \ lm} = -R_{ki\ \ ml} = R_{ik\ \ ml}$
3. Cyclicité: $R_{ki\ \ lm} + R_{km}{}^i{}_{il} + R_{kl\ \ mi} = 0$

1.6.2 Tenseur de Ricci et courbure riemanienne scalaire

Tenseur de Ricci

C'est un tenseur symétrique donné par

$$R_{ij} = R_{i\ \ ,\,kj}^{k} = \partial_k \Gamma_{ij}^k - \partial_j \Gamma_{ik}^k + \Gamma_{pk}^k \Gamma_{ij}^p - \Gamma_{ik}^p \Gamma_{pj}^k \tag{1.73}$$

La courbure riemanienne scalaire est

$$R = R_i^{\ i} = g^{ij} R_{ij} \tag{1.74}$$

1.7 Les équations d'Einstein

Il existe différentes approches conduisant aux équations d'Einstein. Par exemple la méthode intuitive consistant tout simplement à noter que le tenseur des contraintes décrivant le contenu physique de l'espace-temps a une quadrivergence nulle

$$D_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{1.75}$$

et que le tenseur d'Einstein a également une quadrivergence nulle

$$D_\mu G^{\mu\nu} = 0 \tag{1.76}$$

avec

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{1.77}$$

ce qui peut impliquer une proportionnalité entre ces tenseurs, et en introduisant une constante χ dite contante d'Einstein

$$G_{\mu\nu} = -\chi T_{\mu\nu} \tag{1.78}$$

La constante χ est ajustée de telle sorte que les équations de Newton apparaissent comme cas limite des équations d'Einstein.
Une autre approche est de dériver les équations d'Einstein en applicant le principe de moindre action à l'action d'Hilbert-Einstein

1.7.1 L'action d'Hilbert-Einstein

L'action d'Hilbert-Einstein à 4 dimensions, notée $S_{(HE)}$, décrit le champ gravitationnel. Elle est donnée par un lagrangien L dépendant des composantes du tenseur métrique[7] $g_{\mu\nu}$ et ses dérivées.

$$S_{HE} = -\frac{1}{2\mu^2}\int d^4xR\sqrt{-g}. \tag{1.79}$$

Cette action en présence de la matière, notée $S_{(4)}$, est donnée par [18]

$$S_{(4)} \equiv S_{HE} + S_M = -\frac{1}{2\mu^2}\int d^4xR\sqrt{-g} + \int d^4x\sqrt{-g}L_m, \tag{1.80}$$

Avec

- S_M est l'action décrivant la matière.
- $\mu^2 = 8\pi G_{(4)}$ où $G_{(4)}$ est la constant gravitationnelle universelle à 4 dimensions.
- L_m est le lagrangien décrivant la matière.

1.7.2 Variation de l'action d'Hilbert-Einstein

Le principe de moindre action stipule que la variation de l'action est nulle. Alors la variation de l'action d'Hilbert-Einstein est donné par

$$\delta S_{(4)} = \int d^4x\left[\frac{-1}{2\mu^2}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}L_m)}{\delta g^{\mu\nu}}\right]\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g} \tag{1.81}$$

En effet

$$\begin{aligned}\delta S_{(4)} &= \delta S_{EH} + \delta S_M = 0\\ &= \int d^4x\left(\frac{-1}{2\mu^2}\frac{\delta(\sqrt{-g}R)}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta(\sqrt{-g}L_m)}{\delta g^{\mu\nu}}\right)\delta g^{\mu\nu}\\ &= \int d^4x\left[\frac{-1}{2\mu^2}\left(\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}}\right) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}L_m)}{\delta g^{\mu\nu}}\right]\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\end{aligned} \tag{1.82}$$

On étudie tout d'abord la variation de l'action de Hilbert-Einstein dans le vide [18]

$$\begin{aligned}\delta S_{EH} &= \frac{-1}{2\mu^2}\left(\underbrace{\int d^4x\sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}}_{\delta S_1} + \underbrace{\int d^4xR\delta\sqrt{-g}}_{\delta S_2} + \underbrace{\int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}}_{\delta S_3}\right)\\ &\equiv \delta S_1 + \delta S_2 + \delta S_3.\end{aligned} \tag{1.83}$$

7. Le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ est un tenseur qui décrit la géométrie de l'espace-temps.

La variation du tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ dans le 3^{me} terme est

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\lambda} - \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda,\nu} + \delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu}, \tag{1.84}$$

à savoir $\delta R_{\mu\nu} = R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu}$ avec

$$\delta R_{\mu\nu} \equiv \delta R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu} = \nabla_{\nu}(\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma}) - \nabla_{\sigma}(\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}) \tag{1.85}$$

C'est **l'identité de Palatini**, donc la variation du 3^{me} terme devient

$$\begin{aligned}\delta S_3 &= \int g^{\mu\nu}\left[\nabla_{\nu}(\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma}) - \nabla_{\sigma}(\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu})\right]\sqrt{-g}d^4x \\ &= \int \nabla_{\nu}\left[g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma} - g^{\mu\sigma}\delta\Gamma^{\nu}_{\mu\sigma}\right]\sqrt{-g}d^4x \end{aligned} \tag{1.86}$$

Comme chaque quadrivecteure vérifie $\nabla_{\mu}A^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\mu}(\sqrt{-g}A^{\mu})$, Alors δS_3 s'annule car les dérivées de $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ sont nulles sur la frontière.

On passe à δS_2, le premier pas est d'exprimer $\delta(\sqrt{-g})$ en terme de $\delta g^{\mu\nu}$

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta g \tag{1.87}$$

Avec

$$\delta g = \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu} \tag{1.88}$$

Le cofacteur de l'élément $g_{\mu\nu}$ dans le déterminant est $g g_{\mu\nu}$, on obtient

$$\delta g = -g g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \tag{1.89}$$

Soit $g_{\mu\nu}g^{\nu\sigma} = \delta^{\sigma}_{\mu}$, alors $\delta(g_{\mu\nu}g^{\nu\sigma}) = \delta(\delta^{\sigma}_{\mu}) = 0$, où

$$\delta(g_{\mu\nu}g^{\nu\sigma}) = \delta g_{\mu\nu}g^{\nu\sigma} + g_{\mu\nu}\delta g^{\nu\sigma} = 0, \tag{1.90}$$

en multipliant cette dernière par $g^{\mu\rho}$, on trouve

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\lambda}g_{\sigma\nu}\delta g^{\lambda\sigma} \tag{1.91}$$

En remplaçant ce résultat dans la formule (1.89), on aura

$$\delta g = g g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{1.92}$$

Alors l'équation (1.87) devient

$$\begin{aligned}\delta(\sqrt{-g}) &= -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}g g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{1.93}$$

La variation de l'action de Hilbert-Einstein dans le vide peut s'écrire comme suit

$$\begin{aligned}\delta S_{EH} &= -\frac{1}{2\mu^2}\left(\int R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g} - \int (\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu})g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\right)d^4x \\ &= -\frac{1}{2\mu^2}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x \end{aligned} \tag{1.94}$$

Les équations Einstein dans le vide s'écrit

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \tag{1.95}$$

La variation de la formule (1.83) en présence de la matière

$$\delta S_{(4)} = \int d^4x \left[\frac{-1}{2\mu^2}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}L_m)}{\delta g^{\mu\nu}}\right]\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g} \tag{1.96}$$

Les équations d'Einstein en présence de la matière.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{1.97}$$

Avec

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-gL_m})}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{1.98}$$

L'équation d'Einstein ainsi établie peut admettre en plus l'existence d'un terme cosmologique $\Lambda g^{\mu\nu}$ puisque

$$D_\mu(G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}) = 0 \tag{1.99}$$

Les équations d'Einstein s'écrivent alors

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \Lambda g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu} \tag{1.100}$$

1.8 Quelques notions de Cosmologie

La cosmologie est l'étude de l'univers dans son ensemble, de son évolution dans le temps et de ses propriétés globales. Du point de vue théorique, la cosmologie s'appuie principalemelt sur la relativité générale[8] et la physique des particules[9]. Du point de vue observationnel, elle repose sur plusieurs piliers importants:

– L'expansion de l'univers constaté en particulier grâce au décalage vers le rouge de la lumière nous provenant des astres lointaines,

8. La relativité générale développée par Einstein pour étendre le champ d'application de la relativité restreinte à tout les référentiels, elle permet de manipuler des objets plus lourds, comme des étoiles et des trous noirs, et plus rapides, vitesses proches de celle de la lumière, et ainsi de traiter de nombreuses questions d'astrophysique et de cosmologie.

9. La physique des particules ou la physique subatomique est la branche de la physique qui étudie les constituants élémentaires de la matière et les rayonnements, ainsi leurs interactions.

– L'abondance des noyaux légers [10],

– Le fond de rayonnement diffus cosmologique [11],

– La formation des grandes structures.

Le modèle cosmologique standard, dit du Big-Bang, permet de rendre compte de façon précie de ces phénomènes, toutefois au prix de l'introduction de la matière noire et de l'énergie sombre, dont la nature reste encore inconnue.

1.8.1 Le principe cosmologique

Principe cosmologique: "L'univers est spatialement homogène et isotrope" à grande échelle [12], à toute période de son histoire, excepté pour les irrégularités locales, comme les étoiles et les galaxies. Ce modèle est autant motivé par des considérations philisophiques que physiques, mais s'est vu confirmé par les observations récentes.

1. L'univers est **homogène** veut dire qu'il possède les mêmes propriétés dans toutes ses régions,
2. L'univers est **isotrope** veut dire qu'il n'existe pas de directions particulières de l'espace.

Einstein y a adjoint l'hypothèse d'un univers statique. Il a pour ce faire ajouté un terme à ses équations, proportionnel au tenseur métrique $g_{\mu\nu}$, appelée constante cosmologique notée Λ

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{1.101}$$

1.8.2 Hubble et l'expansion de l'univers

C'est Edwin Hubble, qui fut à l'origine de la première mesure de distance d'une galaxie. Ce dernier découvrit en 1929 un phénomène tout-à-fait inattendu: les galaxies semblaient s'éloigner à une vitesse qui augmentait proportionnellement avec leur distance. Ce phénomène se traduit par la loi de Hubble, $v = H_0\ d$, qui relie la vitesse d'éloignement des galaxies v et leur distance d. La constante H_0 appelée constante de Hubble, l'indice 0

10. La composition de l'univers s'avère dominée par les éléments chimiques les plus légers et les plus simples. L'hydrogène et l'hélium constituent ainsi 98 de notre Soleil.

11. Le fond diffus cosmologique est le nom donné au rayonnement électromagnétique issu de l'époque dense et chaude qu'a connu l'Univers par le passé.

12. En assimilant les galaxies à des points.

précise que cette valeur correspond à l'instant présent. Elle n'est pas constante dans le temps, elle était plus élevée dans le passé.

Cette découverte remit en cause l'univers statique d'Einstein. En effet, on peut interpréter la loi de Hubble comme la conséquence d'un univers en expansion. Dans ce cas, l'univers se dilate, ce qui implique qu'il a une origine dans le temps. L'inverse de la constante de Hubble traduit son âge: entre 13 et 15 milliard d'années.

1.9 Le modèle standard cosmologique

Le modèle standard cosmologique est le nom donné au modèle décrivant le mieux le contenu de l'univers, ainsi que les grandes étapes de son histoire, du moins telles qu'elles nous sont révélées par les observations astronomique.

Il nous permet qu'une discription simplifiée de l'univers, du fait des hypothèses d'homogénéité et d'isotropie considérées au départ. Pour expliquer l'origine des différentes structures de l'univers, il nous faut aller au delà de cette description de "fond", en introduisant des perturbations dans les équations d'Einstein.

Le modèle standard de la cosmologie, dit aussi modèle standard de Friedmann-Robertson-Welker (FRW) ou modèle du Big-Bang, est basé sur l'utilisation des équations d'Einstein avec une constante cosmologique Λ nulle. Il décrit l'univers comme un fluide parfait [13] constituant un univers homogène et isotrope dans un système de coordonnées comobiles [14].

13. Le fluide cosmique peut être assimilié par analogie à la thermodynamique à un fluide parfait, décrit entièrement par sa densité ρ et sa pression p.
L'hypothèse du fluide parfait sur le contenu matériel de l'univers est dû pratiquement à ce que les dimensions des particules qui le constituent (les galaxies, amas de galaxies, ...) sont négligeables devant les distances qui séparent ces particules.

14. La matière emplissant l'univers sert souvent en cosmologie de système de référence. En effet, pour étudier la métrique spatio-temporelle isotrope, nous allons nous placer dans un système de référence qui, en chaque point de l'espace, se meut avec la matière. Ce système de référence est dit comobile. Dans ce système, la matière est immobile et la distance comobile entre deux galaxies quelconques est donc constante.

1.9.1 La métrique de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker

Métrique

Le principe cosmologique permet d'introduire une métrique découlant de la relativité générale, la métrique de FLRW[15]

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\Big[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\varphi^2)\Big] \tag{1.102}$$

à savoir que

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{1.103}$$

ds^2 est un invariant relativiste appelé l'élement fondamental.
De manière plus formelle, le tenseur métrique à la forme

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{1.104}$$

L'espace est bien homogène sous cette métrique, puisque le facteur d'échelle multiplie de manière identique les trois coordonnées d'espace. C'est dans le terme $\frac{a^2}{1-kr^2}$ qu'est inclue la courbure de l'espace, et c'est cette courbure qui affecte la distance entre deux points. En effet, deux points[16] séparés par un intervalle ds sont distants de

$$dl^2 = a^2\frac{dr^2}{1-kr^2} \tag{1.105}$$

- k est un entier exprimant la courbure spatiale.

  k= +1 correspond au modèle isotrope fermé décrivant un espace courbe fermé de géométrie sphérique et de volume fini.

  k= 0 correspond au modèle isotrope euclidien décrivant un espace plat infini.

  k= -1 correspond au modèle isotrope ouvert décrivant un espace courbe ouvert de géométrie hyperbolique et de volume infini.

15. La métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker permet de décrire un espace-temps de géométrie homogène et isotrope. En cosmologie, cette métrique est utilisée pour la description de l'évolution de l'univers aux grandes échelles. Elle constitue l'outil principal amenant la construction du modèle cosmologique standard: la théorie du Big Bang.
16. $dt = d\varphi = d\theta = 0$

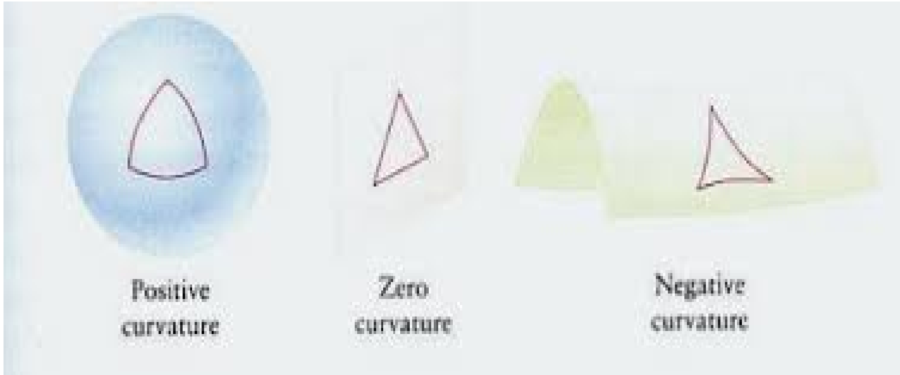

Fig. 1.2 – Topologie de l'espace.

- $a(t)$ est le paramètre d'échelle qui décrit l'expansion de l'univers, nommée parfois rayon de l'univers.
- r est sans dimension et varie de 0 à 1.
- t est le temps propre d'un obsrevateur au repos dans le repère comobile.

1.9.2 Equation de Friedmann-Lemaître

L'hypothèse d'homogénéité et d'isotropie de l'univers restreint le contenu du tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ à sa forme diagonale:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \tag{1.106}$$

ε est la densité d'énergie[17] de l'univers et p est la densité de pression associée.

1.9.2.1 Modèle isotrope fermé

Les équations du champ de gravitation, les équations d'Einstein (**??**) vont constituer le point de départ.

Dans ce modèle, la courbure de l'univers est positive et la forme de l'élément ds^2 qui en résulte est la suivante:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\Big[\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\varphi^2)\Big] \tag{1.107}$$

17. La densité d'énergie $\varepsilon = c^2\rho$, où ρ est la densité de matière.

L'équation de Friedmann-Lemaître pour ce modèle s'écrit

$$(\frac{\dot{a}}{a})^2 = \frac{8\pi G}{3}\varepsilon - \frac{1}{a^2} \tag{1.108}$$

1.9.2.2 Modèle isotrope ouvert

Dans ce cas-ci, la courbure de l'univers est négative et l'élément ds^2 prend la forme

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\Big[\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\varphi^2)\Big] \tag{1.109}$$

L'équation de Friedmann-Lemaître pour ce modèle s'écrit

$$(\frac{\dot{a}}{a})^2 = \frac{8\pi G}{3}\varepsilon + \frac{1}{a^2} \tag{1.110}$$

1.9.2.3 Modèle d'Univers isotrope plat

Dans ce modèle, la courbure de l'univers est nulle et l'élément ds^2 prend une forme bien connue

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\Big[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\varphi^2)\Big] \tag{1.111}$$

En effet, la partie spatiale du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ est caractéristique de l'espace à géométrie euclidienne

$$g_{ij} = a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{1.112}$$

Cette métrique fournit l'équation de Friedmann-Lemaître sous la forme

$$(\frac{\dot{a}}{a})^2 = \frac{8\pi G}{3}\varepsilon \tag{1.113}$$

Ces trois équations peuvent être exprimées dans une seule et même équation à l'aide de la variable discrète k préféfinie:

$$(\frac{\dot{a}}{a})^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\varepsilon \tag{1.114}$$

Cette équation reprend toute la dynamique de l'univers, reliant la matière et l'énergie à la éométrie de l'espace. On retrouve bien, dans cette équation, l'idée générale de la relativité: la matière (membre de droit) courbe l'espace-temps (membre de gauche).

1.9.3 Equation de conservation de l'énergie

A partir de lois de la thermodynamique, l'équation de conservation de l'énergie de l'univers s'écrit

$$\dot{\varepsilon} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + p) \tag{1.115}$$

1.9.4 Equation d'état

Pour résoudre les équations (1.114) et (1.115), il nous manque un paramètre qui est la pression p. Ce paramètre est fourni par l'équation d'état $p = p(\varepsilon)$ de la matière. Consédérons séparément trois cas:

1. L'Univers est constitué de matière classique, pour laquelle $\frac{1}{2}mv^2 \ll mc^2$. Alors

$$p = 0 \tag{1.116}$$

2. L'Univers est constitué de matière relativiste, pour laquelle v est proche de c. Alors

$$p = \frac{1}{3}\varepsilon \tag{1.117}$$

3. L'Univers est dominé par une sorte d'énergie du vide, pour laquelle

$$p = -\varepsilon \tag{1.118}$$

1.9.5 Densité d'énergie

La densité d'énergie dans l'univers n'est pas dûe uniquement à une des trois composantes évoquées précédement, mais à une combinaison de ces trois composantes:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{matière cl}} + \varepsilon_{\text{matière rel}} + \varepsilon_{\text{vide}} \tag{1.119}$$

Les densités d'énergie de ces trois composantes interviennent différemment dans la densité d'érengie totale, avec une importance fonction du temps. Le tableau suivant reprend les caractéristiques fondamentales de la dynamique de l'Univers plan lorsque celui-ci est dominé par une des trois composantes d'énergie.

ε	$\dot{a}$	$\ddot{a}$	$H = \frac{\dot{a}}{a}$	Conclusion
$\varepsilon_{\text{matière cl}}$	> 0	< 0	> 0	Expansion avec décélération
$\varepsilon_{\text{matière rel}}$	> 0	< 0	> 0	Expansion avec décélération
$\varepsilon_{\text{matière vide}}$	> 0	> 0	> 0	Expansion avec accélération

CHAPITRE 2

Le modèle de DGP et les équations d'Einstein modifiées

Dans la théorie de gravité modifiée[1] où est utilisé le concept des dimensions supplémentaires infinies, on présente le modèle de DGP qui s'appuie sur le constat que " la gravité est la force la plus faible comparant aux autres forces"[2], cette faiblesse est due à sa capacité de se propager dans l'espace-temps.
Dans ce modèle, on suppose l'existence d'un espace-temps de Minkowski[3] à 5 dimensions dans le quel est inclut notre propre univers à 4 dimensions. L'univers est une hypersurface, nommée Brane, contenue dans l'espace de dimension supplémentaire plus grand, nommé Bulk.

Dans ce chapitre, on a varié l'action du modèle DGP qui représente une sommation de l'action de Hilbert-Einstein[4] avec un terme de matière à 5 dimensions et une action de Hilbert-Einstein à 4 dimensions afin de dériver les équations d'Einstein modifiées. On

1. C'est une théorie de gravité modifiée à grande échelle qui diffère à la théorie de la relativité générale, la modification peut être une modification scalaire dans laquelle un champ scalaire additionnel est couplé non minimale à la métrique (modèle de Galileons) ou bien en postulant l'existence de dimensions supplémentaires (modèle DGP)

2. Les autres forces sont les forces fondamentale " force nucléaire forte, force électromagnétique et force nucléaire faible"

3. c'est un espace plat présente l'espace-temps de la relativité restreinte

4. c'est l'action proposée par Albert Einstein et David Hilbert utilisée pour dériver les équations du champ de la relativité générale.

a donné la formule de la métrique utilisée pour étudier ce modèle en tenant compte de la dimension supplémentaire ainsi que le tenseur d'énergie impulsion.

Dans ce qui suit, on utilise généralement les unité naturelles, où $c = h = 1$, la signature de la métrique $(-1, +1, +1, +1)$, les indices grec $(\mu, \nu, ...)$ prennent les valeurs $(0, 1, 2, 3)$ tandis que les indices latins en majuscule $(A, B, ...)$ prennent les valeurs $(0, 1, 2, 3, 4)$.

2.1 Modèle de DGP

Soit une 3D-brane intégrée dans un bulk à 5 dimensions, on utilise y la coordonnée de la cinquième dimension. Pour simplifier les calculs, on suppose que la brane est située à $y = 0$.

L'action dans le bulk, notée $S_{(5)}$, est donnée par [19]

$$S_{(5)} = -\frac{1}{2\kappa^2} \int d^5X \sqrt{-\tilde{g}}\tilde{R} + \int d^5X \sqrt{-\tilde{g}} L_m - \frac{1}{2\mu^2} \int d^4x \sqrt{-g}R, \tag{2.1}$$

le 1^{er} terme de cette action correspond à l'action de Hilbert-Einstein à 5 dimensions avec une métrique $\tilde{g}_{AB}$ à 5 dimensions et du scalaire de Ricci $\tilde{R}$, le 2^{me} terme correspond au terme de la matière à 5 dimensions et le dernier le terme représente la courbure de la brane qui correspond à l'action d'Hilbert-Einstein [5] à 4 dimensions avec le scalaire de Ricci R et une métrique $g_{\mu\nu}$ dans la brane.

Les deux métrique $g_{\mu\nu}$ et $\tilde{g}_{AB}$ sont liées par

$$g_{\mu\nu} = \partial_\mu X^A \partial_\nu X^B \tilde{g}_{AB}, \tag{2.2}$$

où $X^A(x^\mu)$ représente la coordonnée d'un événement dans la brane au point x^μ.

Pour rendre compte aux contributions de la matière au niveau de la brane [20], on peut écrire

$$\int d^4x \sqrt{-g}(\lambda_{brane} + l_m) \tag{2.3}$$

λ_{brane} est appelée tension de la brane (joue un rôle similaire à une constante cosmologique).

5. Elle est responsable pour maintenir la gravité Newtonienne à 4 dimensions dans des échelles plus petites.

Les coefficients d'intégration dans l'action, supposées indépendants les uns des autre, sont liés à la constantes gravitationnelle de Newton et à la masse de Planck [6] de dimensions correspondantes par

$$\begin{aligned}\kappa^2 &= 8\pi G_{(5)} = M_{(5)}^{-3} \\ \mu^2 &= 8\pi G_{(4)} = M_{(4)}^{-2}\end{aligned} \tag{2.4}$$

2.2 La métrique du bulk

Soit la métrique du bulk à 5 dimensions [19]

$$ds^2 = \tilde{g}_{AB} dx^A dx^B = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + b^2 dy^2, \tag{2.5}$$

où y est la coordonnée de la 5^{me} dimension.
En s'intéressant aux solutions cosmologiques, on peut prendre la métrique sous la forme suivante

$$ds^2 = -n^2(\tau, y) d\tau^2 + a^2(\tau, y)\gamma_{ij} dx^i dx^j + b^2(\tau, y) dy^2, \tag{2.6}$$

avec γ_{ij} est la métrique à 3 dimensions à symétrie maximale [7] tout comme la métrique de FLRW qui prend la forme

$$ds^2 = -n^2(\tau, y) dr^2 + a^2(\tau, y)\left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin\theta^2 d\phi^2)\right) + b^2(\tau, y) dy^2, \tag{2.7}$$

avec τ est le temps cosmique [8], (r, θ, ϕ) coordonnées sphériques. La caractéristique de cette métrique est qu'elle a inclus le facteur d'échelle,$a(\tau, y)$, qui est responsable de l'expansion isotope de l'univers.

6. La masse de Planck est une unité de masse dans le système d'unité de Planck, en cosmologie et en physique des particule cette masse réduite est définit par $\sqrt{\frac{\hbar c}{8\pi G}}$.

7. La métrique à 3 dimensions dont la symétrie maximale des coordonnées spatiales reflète les propriétés homogènes et isotrope de l'univers.

8. En cosmologie, le temps cosmique est le temps propre d'un observateur dit "comobile" appartenant à un univers homogène et isotrope

2.3 Les équations d'Einstein modifiées

La variation de l'action à 5 dimensions, donnée par l'équation (2.1) est

$$\delta S_{(5)} = -\frac{1}{2k^2}\int d^5X\sqrt{-\tilde{g}}(\tilde{R}_{AB} - \frac{1}{2}\tilde{R}\tilde{g}_{\tilde{A}B})\delta\tilde{g}^{AB} + \int d^5X\frac{1}{2}\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{T}_{AB}\delta\tilde{g}^{AB}$$
$$- \frac{1}{2\mu^2}\int d^4x\sqrt{-g}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu}, \tag{2.8}$$

avec $\tilde{T}_{AB}$ tenseur d'énergie impulsion qui vient de la variation du terme de lagrangien de matière à 5 dimensions, il s'écrit ainsi

$$\tilde{T}_{AB} = \frac{2}{\sqrt{-\tilde{g}}}\left[\frac{\delta(\sqrt{-\tilde{g}}L_m)}{\delta\tilde{g}^{AB}} - \left(\frac{\delta(\sqrt{-\tilde{g}}L_m)}{\delta\tilde{g}^{AB}_{,\alpha}}\right)_{,\alpha}\right] \tag{2.9}$$

Réécrivant cette variation en combinant les termes en une seule intégration à 5 dimensions à partir de la métrique $g^{\mu\nu} = \partial^\mu X_A\partial^\nu X_B\tilde{g}^{AB}$ et en utilisant ceci:

$$\sqrt{-g} = \sqrt{\frac{-\tilde{g}}{b^2}} = \frac{1}{b}\sqrt{-\tilde{g}} \tag{2.10}$$

$$\delta g^{\mu\nu} = \delta(\partial^\mu X_A\partial^\nu X_B\tilde{g}^{AB}) = \partial^\mu X_A\partial^\nu X_B\delta\tilde{g}^{AB} \tag{2.11}$$

$$\int d^4x = \int d^5X\delta(y) \tag{2.12}$$

En effet, soient g le determinant de la métrique $g_{\mu\nu}$ et $\tilde{g}$ le determinant de la métrique $\tilde{g}^{AB}$, on aura

$$det(\tilde{g}^{AB}) = b^2 g = \tilde{g}$$

alors

$$\sqrt{-b^2 g} = \sqrt{-\tilde{g}}$$
$$\sqrt{-g} = \frac{1}{b}\sqrt{-\tilde{g}}$$

La variation de la métrique, $\delta(g^{\mu\nu})$ est donnée par

$$\delta g^{\mu\nu} = \delta(\partial^\mu X_A\partial^\nu X_B\tilde{g}^{AB}) = \underbrace{\delta\partial^\mu X_A\partial^\nu X_B\tilde{g}^{AB}}_{(A)} + \underbrace{\partial^\mu X_A\delta\partial^\nu X_B\tilde{g}^{AB}}_{(B)} + \partial^\mu X_A\partial^\nu X_B\delta\tilde{g}^{AB}$$
$$= \partial^\mu X_A\partial^\nu X_B\delta\tilde{g}^{AB},$$

les termes (A) et (B) sont nuls car $(\partial^\mu X_A)$ et $(\partial^\nu X_B)$ sont constantes.

L'équation (2.8) se réecrit

$$\delta S_{(5)} = \int d^5X\sqrt{-\tilde{g}} \times \left[-\frac{1}{2k^2}(\tilde{R}_{AB} - \frac{1}{2}\tilde{R}\tilde{g}_{AB}) + \frac{\tilde{T}_{AB}}{2} - \frac{\delta(y)}{2\mu^2 b}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu})\partial^\mu X_A \partial^\nu X_B\right]\delta\tilde{g}^{AB}. \quad (2.13)$$

Du principe de moindre action , $\delta S_{(5)} = 0$, et pour tous $\delta\tilde{g}^{AB}$ arbitraires, on obtient les équations d'Einstein modifiées

$$\tilde{G}_{AB} \equiv \tilde{R}_{AB} - \frac{1}{2}\tilde{R}\tilde{g}_{AB} = \kappa^2\left(\tilde{T}_{AB} + \tilde{U}_{AB}\right) \equiv \kappa^2\tilde{S}_{AB}, \quad (2.14)$$

avec

$$\tilde{U}_{AB} = -\frac{\delta(y)}{\mu^2 b}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu})\partial^\mu X_A\partial^\nu X_B, \quad (2.15)$$

qui est issu de terme de courbure scalaire à 4 dimensions.

2.3.1 Tenseur d'énergie-impulsion

Pour le cas d'un fluide cosmique homogène, le tenseur d'énergie-impulsion prend la forme suivante

$$T^A_B = diag(-\rho, P, P, P, P), \quad (2.16)$$

Avec ρ est sa densité d'énergie et P est sa pression.

Dans les équations d'Einstein modifiées on a des contributions à la fois du bulk et de la brane.

$$\tilde{T}^A_B = \tilde{T}^A_B|_{bulk} + \tilde{T}^A_B|_{brane} \quad (2.17)$$

Dans le bulk, l'équation d'état[9] $w_B = p_B/\rho_B = -1$, cela veut dire que $p_B = -\rho_B$, on prend la contribution de la constante cosmologique seulement c'est à dire:

$$\tilde{T}^A_B|_{bulk} = diag(-\rho_B, -\rho_B, -\rho_B, -\rho_B, -\rho_B) \quad (2.18)$$

9. Dans le cas où la constante cosmologique est dominée, l'équation d'état prend la forme $w_B = p_B/\rho_B = -1$.

Dans la brane, on considère seulement les fluides homogènes qui sont à 4 dimensions. dans ce cas, le tenseur d'énergie-impulsion devient

$$\tilde{T}^A_B|_{brane} = \frac{\delta(y)}{b} diag(-\rho_b, p_b, p_b, p_b, 0) \tag{2.19}$$

ρ_b et p_b sont la densité d'énergie et la pression respectivement. Elles sont indépendantes de la position dans la brane mais dépendantes du temps.

2.3.2 Terme $\tilde{U}$ source de courbure scalaire

Le terme $\tilde{U}$ est le tenseur d'Einstein à 4 dimensions. En utilisant la métrique (2.6) et la formule (2.15) pour calculer ce terme, on trouve la métrique dans la brane à 4 dimensions

$$ds^2 = -n^2 d\tau^2 + a^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j. \tag{2.20}$$

En coordonées sphériques elle est donnée par

$$ds^2 = -n^2 d\tau^2 + a^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right) \tag{2.21}$$

On calcule le tenseur de Ricci, $R_{\mu\nu}$, et la courbure scalaire, R, de la brane, mais on a besoin les sumbôles de Christoffel, en utilisant cette relation, on aura

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} (g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}) \tag{2.22}$$

$\Gamma^0_{00} = \frac{\dot{n}}{n}$	$\Gamma^i_{00} = 0$
$\Gamma^i_{0j} = \frac{\dot{a}}{a}\delta^i_j$	$\Gamma^0_{0i} = 0$
$\Gamma^0_{ij} = \frac{a\dot{a}}{n^2}\gamma_{ij}$	$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\gamma^{im}(\gamma_{mk,j} + \gamma_{mj,k} - \gamma_{jk,m})$

Tableau 1: Symbôles de Christoffel calculés à partir de la métrique (2.20).

En coordonnées sphériques (r, θ, ϕ), les éléments non nuls sont

$\Gamma^1_{11} = \frac{kr}{1-kr^2}$	$\Gamma^1_{22} = -r(1 - kr^2)$
$\Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta(1 - kr^2)$	$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}$
$\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta$	$\Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}$
$\Gamma^3_{23} = \cot\theta$	

Tableau 2: Symbôles de Christoffel calculés à partir de la métrique (2.21).

Soit le tenseur de Ricci, $R_{\mu\nu}$ [12]

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^\lambda_{\mu\lambda,\nu} + \Gamma^\lambda_{\alpha\lambda}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\alpha\mu}\Gamma^\alpha_{\lambda\nu} \tag{2.23}$$

Les éléments non nuls sont

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} + 3\frac{\dot{a}\dot{n}}{an}$$
$$R_{ij} = \left(\frac{a\ddot{a}}{n^2} + 2\frac{\dot{a}^2}{n^2} - \frac{a\dot{a}\dot{n}}{n^3} + 2k\right)\gamma_{ij} \tag{2.24}$$

Par contraction du tenseur de Ricci,$R_{\mu\nu}$, et la métrique, $g_{\mu\nu}$, on obtient le scalaire de Ricci R

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = 6\left(\frac{\ddot{a}}{an^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2n^2} - \frac{\dot{a}\dot{n}}{an^3} + \frac{k}{a^2}\right), \tag{2.25}$$

d'où l'expression de $\tilde{U}_{\mu\nu}$ terme source de courbure scalaire est:

$$\tilde{U}_{\mu\nu} = -\frac{\delta(y)}{\mu^2 b}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right) \tag{2.26}$$

Les termes non nuls de $\tilde{U}_{\mu\nu}$ sont:

$$\tilde{U}_{00} = -\frac{3\delta(y)}{\mu^2 b}\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + k\frac{n^2}{a^2}\right)$$
$$\tilde{U}_{ij} = -\frac{\delta(y)}{\mu^2 b}\left[\frac{a^2}{n^2}\left(-\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{\dot{a}\dot{n}}{an} - 2\frac{\ddot{a}}{a}\right) - k\right]\gamma_{ij} \tag{2.27}$$

2.3.3 Les équations d'Einstein modifiées

Dans ce paragraphe, on exprime les équations d'Einstein modifiées données par (2.14) en utilisant la métrique du bulk donée par l'équation (2.6). Pour celà, on calcule d'abord les symbôles de Christoffel dans le bulk, on les récapitule dans le tableau suivant

$\Gamma^0_{04} = \frac{n'}{n}$	$\Gamma^i_{j4} = \frac{a'}{a}\delta^i_j$	$\Gamma^4_{04} = \frac{\dot{b}}{b}$
$\Gamma^0_{i4} = 0$	$\Gamma^i_{44} = 0$	$\Gamma^4_{ij} = -\frac{aa'}{b^2}\gamma_{ij}$
$\Gamma^0_{44} = \frac{b\dot{b}}{n^2}$	$\Gamma^4_{00} = \frac{nn'}{b^2}$	$\Gamma^4_{i4} = 0$
$\Gamma^i_{04} = 0$	$\Gamma^4_{0i} = 0$	$\Gamma^4_{44} = \frac{b'}{b}$

Tableau 3: Symbôles de Christoffel dans le bulk.

Les termes non nuls du tenseur de Ricci, $\tilde{R}_{\mu\nu}$, dans le bulk sont donnés par[10]

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{00} &= \frac{nn''}{b^2} - \frac{nn'b'}{b^3} - 3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{b}}{b} + 3\frac{\dot{a}\dot{n}}{an} + \frac{\dot{b}\dot{n}}{bn} + 3\frac{nn'a'}{ab^2} \\
\tilde{R}_{44} &= \frac{b\ddot{b}}{n^2} - \frac{b\dot{b}\dot{n}}{n^3} - \frac{n''}{n} - 3\frac{a''}{a} + 3\frac{b\dot{a}\dot{b}}{an^2} + \frac{b'n'}{bn} + 3\frac{a'b'}{ab} \\
\tilde{R}_{04} &= -3(\frac{\dot{a}'}{a} - \frac{\dot{a}n'}{an} - \frac{a'\dot{b}}{ab}) \\
\tilde{R}_{ij} &= \left(\frac{a\ddot{a}}{n^2} + 2(\frac{\dot{a}}{n})^2 - \frac{a\dot{a}\dot{n}}{n^3} - \frac{aa''}{b^2} - 2(\frac{a'}{b})^2 + \frac{aa'b'}{b^3} - \frac{aa'n'}{nb^2} + \frac{a\dot{a}\dot{b}}{bn^2} + 2k\right)\gamma_{ij}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Le scalaire de Ricci, $\tilde{R}$, dans le bulk est

$$\begin{aligned}
\tilde{R} &= 2\left(-\frac{n''}{b^2 n} + \frac{n'b'}{nb^3} + \frac{\ddot{b}}{bn^2} - \frac{\dot{b}\dot{n}}{bn^3}\right) \\
&+ 6\left(\frac{\ddot{a}}{an^2} - \frac{\dot{a}\dot{n}}{an^3} - \frac{a''}{ab^2} + \frac{a'b'}{ab^3} - \frac{a'n'}{anb^2} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{abn^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2n^2} - \frac{a'^2}{a^2b^2} + \frac{k}{a^2}\right)
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Par un calcul simple on arrive finalement aux équations d'Einstein modifiées:

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{00} &= 3\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{a''n^2}{ab^2} + \frac{a'b'n^2}{ab^3} - \frac{a'^2n^2}{a^2b^2} + \frac{kn^2}{a^2}\right) \\
\tilde{G}_{ij} &= \left[\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{2a''}{a} + \frac{a'^2}{a^2} - 2\frac{a'b'}{ab} + 2\frac{a'n'}{an} + \frac{n''}{n} - \frac{n'b'}{nb}\right)\right]\gamma_{ij} \\
&- \left[\frac{a^2}{n^2}\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} - 2\frac{\dot{a}\dot{n}}{an} + 2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\ddot{b}}{b} - \frac{\dot{b}\dot{n}}{bn}\right) - k\right]\gamma_{ij} \\
\tilde{G}_{44} &= 3\left(\frac{a'^2}{a^2} + \frac{a'n'}{an} - \frac{\ddot{a}b^2}{an^2} + \frac{\dot{a}\dot{n}b^2}{an^3} - \frac{b^2\dot{a}^2}{a^2n^2} - \frac{kb^2}{a^2}\right) \\
\tilde{G}_{04} &= -3\left(\frac{\dot{a}'}{a} - \frac{\dot{a}n'}{an} - \frac{a'\dot{b}}{ab}\right)
\end{aligned} \tag{2.30}$$

La contribution des termes à 4 dimensions de la courbure scalaire sont tous contenus dans $\tilde{U}_{AB}$.

2.4 Intégrale premier des équations d'Einstein modifiées

On remarque que le terme $\tilde{G}_{04}$ dans les équations d'Einstein (2.14) est nul, car

$$\tilde{G}_{04} = -3\left(\frac{\dot{a}'}{a} - \frac{\dot{a}n'}{an} - \frac{a'\dot{b}}{ab}\right) = \kappa^2\left(\tilde{T}_{04} + \tilde{U}_{04}\right) = 0 \tag{2.31}$$

10. Le point correspond à une dérivation par rapport au temps τ par contre le prime correspond à une dérivation par rapport à la coordonnée supplémentaire y.

En effet, on définit une fonction F dépend uniquement de τ et de y, par

$$F(\tau, y) = \frac{(aa^{'})^2}{b^2} - \frac{(a\dot{a})^2}{n^2} - ka^2 \tag{2.32}$$

Les fonctions dérivées de F par rapport à τ et par rapport à y, notées, $\dot{F}$, et, $F^{'}$, respectivement sont:

$$\begin{aligned}
F^{'} &= \frac{2(aa^{'})(aa^{''} + a^{'2})b^2 - 2bb^{'}(aa^{'})^2}{b^4} - \frac{2(a\dot{a})(a\dot{a}^{'} + a^{'}\dot{a})n^2}{n^4} + \frac{2nn^{'}(a\dot{a})^2}{n^4} - k(2aa^{'}) \\
&= -\frac{2a^3a^{'}}{n^2}\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{a^{''}n^2}{ab^2} - \frac{a^{'2}n^2}{a^2b^2} + \frac{a^{'}b^{'}n^2}{ab^3} + \frac{kn^2}{a^2}\right) - \frac{2a^3\dot{a}}{n^2}\left(\frac{\dot{a}^{'}}{a} - \frac{\dot{a}n^{'}}{an} - \frac{a^{'}\dot{b}}{ab}\right) \\
F^{'} &= -\frac{2a^3a^{'}}{n^2}\left(\frac{1}{3}\tilde{G}_{00}\right)
\end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}
\dot{F} &= \frac{2(aa^{'})(a\dot{a}^{'} + a^{'}\dot{a})b^2 - 2b\dot{b}(aa^{'})^2}{b^4} - \frac{2(a\dot{a})(a\ddot{a} + \dot{a}^2)n^2}{n^4} + \frac{2n\dot{n}(a\dot{a})^2}{n^4} - k(2a\dot{a}) \\
&= \frac{2a^3\dot{a}}{b^2}\left(\frac{a^{'2}}{a^2} + \frac{a^{'}n^{'}}{an} - \frac{b^2\dot{a}^2}{n^2a^2} - \frac{b^2\ddot{a}}{an^2} + \frac{\dot{a}\dot{n}b^2}{an^3} - \frac{kb^2}{a^2}\right) + \frac{2a^3a^{'}}{b^2}\left(\frac{\dot{a}^{'}}{a} - \frac{\dot{a}n^{'}}{an} - \frac{a^{'}\dot{b}}{ab}\right) \\
\dot{F} &= \frac{2a^3\dot{a}}{3b^2}\tilde{G}_{44}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

D'autre part, le terme $\tilde{G}_{44}$ de l'équation d'Einstein (2.14) est:

$$\tilde{G}_{44} = k^2(\tilde{T_{44}} + \tilde{U_{44}}) = -\kappa^2\rho_B b^2 \tag{2.35}$$

Donc l'équation (2.34) devient

$$\dot{F} = -\frac{2}{3}\kappa^2\dot{a}a^3\rho_B \tag{2.36}$$

La densité d'énergie du bulk est supposée constante, donc on peut intégrer l'équation (2.36), on obtient

$$F = \int (-\frac{2}{3}k^2a^3\dot{a}\rho_B)d\tau = -\frac{1}{6}\kappa^2a^4\rho_B - C \tag{2.37}$$

ou C est une constante d'intégration.

Finalement on obtient l'intégrale premier des équations d'Einstein en substituant F dans l'équation (2.32)

$$\frac{(a^{'}a)^2}{b^2} - \frac{(\dot{a}a)^2}{n^2} - ka^2 + \frac{1}{6}\kappa^2a^4\rho_B + C = 0 \tag{2.38}$$

De plus, puisque $\tilde{U}_{AB}$ ne contribue pas dans les calculs ci-dessus [21]. Dans le chapitre suivant on verra que cela change lorsque on calcul les équations de Friedmann qui prennent les contributions de toutes les dimensions.

CHAPITRE 3

Équations de Friedmann et la cosmologie du modèle DGP

Dans le chapitre précédente, on a parlé des équations d'Einstein comme des équations qui régissent les interactions gravitationnelles de la masse et de l'énergie. On a besoin maintenant de calculer les équations de Friedmann qui sont des équations les plus explicites pour mieux comprendre l'évolution de l'univers.

Dans ce chapitre, on verra certains propriétés du modèle DGP tel que la cosmologie en présence de la dimension supplémentaire, les conditions dont les quelles on peut récupérer la cosmologie standard et prédir la cosmologie tardive afin de connaitre l'évolution du modèle DGP. En fin, on discute brièvement la méthode qui permet la transition de la brane au bulk.

3.1 Équation de Friedmann

A partir de la métrique FLRW , on obtient deux équations indépendantes connues sous le nom des équations de Friedmann[1]:

$$
\begin{aligned}
H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \\
\frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3}(3p+\rho),
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

avec H est le paramètre de Hubble[1]. Lorsque toute les densité d'énergie sont combinées en un seul terme ρ, on peut obtenir l'équation de continuité à partir des équations de Friedmann:

$$\dot{\rho} + 3(p+\rho)\frac{\dot{a}}{a} = 0 \tag{3.2}$$

Cette équation présente la conservation de l'énergie du fluide cosmique dans l'univers. Si on suppose encore une équation d'état $w = p/\rho$, on trouve:

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{\rho}}{\rho} &= -3(\omega+1)\frac{\dot{a}}{a} \\
\ln \rho &= -3(\omega+1)\ln a + C \\
\rho &\propto a^{-3(\omega+1)}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

L'équation d'évolution des densités d'énergie en terme de décalage vers le rouge[2] avec l'équation d'état constante[3] est donnée par

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(\omega+1)} = (1+z)^{3(\omega+1)}, \tag{3.4}$$

où ρ_0 est la valeur actuelle de la densité d'énergie.

La densité d'énergie totale d'un système est donnée par

$$\rho(z) = \sum_i \rho_0^{(i)}(1+z)^{3(\omega_i+1)}, \tag{3.5}$$

avec $\rho_0^{(i)}$ la densité d'énergie actuelle.

On introduit des quantités sans dimensions qui sont les paramètres de densité

$$\Omega(t) \equiv \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)}), \tag{3.6}$$

avec $\rho_c(t)$ est la densité critique[4] définit par $\rho_c(t) = 3H^2(t)/8\pi G$.

Avec toutes ces définitions, la première équation de Friedmann devient:

$$1 = \Omega(t) - \frac{k}{a^2H^2(t)} \tag{3.7}$$

1. $H = \frac{\dot{a}}{a}$ qui est introduit pour mesurer le taux d'expansion de l'univers.

2. Le décalage vers le rouge est un Phénomène définit par $1+z = \lambda_0/\lambda$ ou par $1+z = a_0/a$ (avec indice 0 désigne la valeur actuelle) qui est considéré comme la preuve de l'expansion de l'univers définit comme un décalage vers les grandes longueurs d'ondes des raies spectrales.

3. l'équation d'état constante peut prendre quelques valeurs par exemple pour un univers de poussière (où la pression est négligeable ($\omega = 0$),univers de radiation (matière relativiste) lumière ($w = \frac{1}{3}$) et la constante cosmologique ($\omega = -1$).

4. La densité critique est le totale des densités correspondantes à un univers plat.

$\Omega(t) = 1$ correspond à un univers plat, on peut écrire:

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \frac{\rho(t)}{\rho_c^{(0)}} - \frac{k}{a^2 H_0^2}, \tag{3.8}$$

où H_0 est le paramètre de Hubble du temps actuel.

En terme de décalage vers le rouge, on aura

$$\frac{H^2(z)}{H_0^2} = \sum_i \frac{\rho_0^{(i)}}{\rho_c^{(0)}}(1+z)^{3(w_i+1)} - \frac{k}{a_0^2 H_0^2}(1+z)^2 \tag{3.9}$$

Donc

$$H^2(z) = H_0^2[\Omega_k(1+z)^2 + \Omega_M(1+z)^3 + \Omega_X(1+z)^{3(1+w_X)}], \tag{3.10}$$

où

1. $\Omega_M = \frac{\rho_0^{(M)}}{\rho_c^{(0)}}$ est le paramètre de densité actuel pour la matière.
2. $\Omega_X = \frac{\rho_0^{(X)}}{\rho_c^{(0)}}$ le paramètre de densité actuel pour l'énergie noire avec l'équation d'état w_x.
3. $\Omega_k = -\frac{k}{a_0^2 H_0^2}$ est un terme artificiel qui représente la planéité de l'univers.

Notant que lorsque l'équation est évaluée à $z = 0$ [5] , on trouve

$$\Omega_k + \Omega_M + \Omega_X = 1 \tag{3.11}$$

Ceci est connu comme la condition de normalisation qui est utilisée comme une des contraintes dans l'ajustement du paramètre pour le modèle ΛCDM.

3.2 Condition de jonction

Le but de cette section est de résoudre les équations d'Einstein autour de $y = 0$ pour obtenir les équations de mouvement de la brane. Lors de cette résolution on doit d'abord définir les conditions aux limites qui présentent dans notre cas les conditions de jonction.

Pour avoir une géométrie bien définie, on doit avoir une distribution delta [6] définit par [?]:

$$a'' = \hat{a}'' + [a']\delta(y), \tag{3.12}$$

5. le cas où $z = 0$ correspond au cas du temps actuel.

6. On cherche une solution de l'équation $G_{AB} = \kappa^2 T_{AB}$ au voisinage de $y = 0$ afin d'avoir une géométrie bien définie, la métrique doit être continue à travers la brane localisé dans $y = 0$ cependant ses dérivés par rapport à y peut être discontinue en $y = 0$, cela implique l'existence d'une fonction delta de Dirac dans les deuxièmes dérivés d'une métrique par rapport à y. Les termes résultant avec une fonction delta apparaissant dans le tenseur d'Einstein, Dans ses composantes: $\tilde{G}_{00}$ et $\tilde{G}_{ij}$ doivent correspondre aux

où $\hat{a}^{''}$ est la partie continue de $a^{''}$ et $[a^{'}]$ est le saut de $a^{'}$.

Si on substitue l'expression de $a^{''}$ (3.12) au tenseur d'Einstein (2.28), comparant au terme $\tilde{T}$ et $\tilde{U}$ et en fait équivaut juste les termes qui contient $\delta(y)$, puis à partir des termes de $\tilde{G}_{00}$, on trouve:

$$-\frac{3n^2[a^{'}]}{ab^2} = \kappa^2(\tilde{T}_{00} + \tilde{U}_{00}) = \kappa^2 n^2 \frac{\rho_b}{b} - \frac{3\kappa^2}{\mu^2 b}(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + k\frac{n^2}{a^2}) \tag{3.13}$$

de même façons on peut avoir un saut dans $n^{'}$, ce qui nous donne l'expression de $n^{''}$:

$$n^{''} = \hat{n}^{''} + [n^{'}]\delta(y) \tag{3.14}$$

Encore une fois, on substitue l'expression de $a^{''}$ et $n^{''}$ dans l'expression d'Einstein et en considérant juste les termes de $\delta(y)$, à partir de $\tilde{G}_{11}$:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b^2}\left(\frac{2[a^{'}]}{a} + \frac{[n^{'}]}{n}\right)\gamma_{11} &= \kappa^2(\tilde{T}_{11} + \tilde{U}_{11}) \\ &= -\kappa^2\frac{p_b}{b}a^2\gamma_{11} - \frac{\kappa^2}{\mu^2 b}\left[\frac{a^2}{n^2}\left(-\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{\dot{a}^2\dot{n}^2}{a^2n^2} - 2\frac{\ddot{a}}{a}\right) - k\right]\gamma_{11} \end{aligned} \tag{3.15}$$

On combine les résultats trouvés, on obtient la condition de jonction:

$$\begin{aligned} \frac{[a^{'}]}{a_0 b_0} &= -\frac{\kappa^2}{3}\rho_b + \frac{\kappa^2}{\mu^2 n_0^2}\left(\frac{\dot{a}_0^2}{a_0^2} + k\frac{n_0^2}{a_0^2}\right) \\ \frac{[n^{'}]}{n_0 b_0} &= \frac{\kappa^2}{3}(3p_b + 2\rho_b) + \frac{\kappa^2}{\mu^2 n_0^2}\left(-\frac{\dot{a}_0^2}{a_0^2} - 2\frac{\dot{a}_0\dot{n}_0}{a_0 n_0} + 2\frac{\ddot{a}_0}{a_0} - k\frac{n_0^2}{a_0^2}\right) \end{aligned} \tag{3.16}$$

Où l'indice 0 dans a ,b et n désigne les fonctions mesurées à $(y = 0)$ respectivement.

On note que la densité d'énergie de ce fluide est toujours négative quand $k = 0$ ou $k = 1$.

Supposant une symétrie de $y \leftrightarrow -y$, avec $[a^{'}] = 2a^{'}(0+)$ lorsque $y \to 0$. Combinant l'équation (2.38) et la condition de jonction (3.16) pour obtenir la 1^{re} équation de Friedmann:

$$\epsilon\sqrt{H^2 + \frac{k}{a_0^2} - \frac{\kappa^2}{6}\rho_B + \frac{C}{a_0^4}} = \frac{\kappa^2}{2\mu^2}\left(H^2 + \frac{k}{a_0^2}\right) - \frac{\kappa^2}{6}\rho_b \tag{3.17}$$

---

composantes de distribution de tenseur d'énergie afin de satisfaire les équations d'Einstein, on a:

$$a^{''} = \hat{a}^{''} + [a^{'}]\delta(y)$$

$\hat{a}$: La partie non distributive de double dérivation de a.

$[a^{'}]$: le saut dans la 1^{re} dérivation autour $y = 0$ définie par $[a^{'}] = a^{'}(0^+) + a^{'}(0^-)$.

($\epsilon = \pm 1$) est le signe de $[a^{'}]$.

C'est l'équation qui régit la dynamique de la cosmologie, en particulier l'évolution du paramètre de Hubble.

En remplaçant la condition de jonction pour le terme (05) de l'équation d'Einstein (2.29), on peut récupérer l'équation de continuité:

$$\dot{\rho}_b + 3\frac{\dot{a}_0}{a_0}(p + \rho_b) = 0 \tag{3.18}$$

A partir de cette équation et en supposant une équation d'état constante pour ces fluides, on obtient l'évolution des densités: $\rho \propto a^{-3(1+w)}$. Cette idée sera utilisée dans le modèle DGP pour exprimer le paramètre de Hubble en terme de paramètre de densité relative.

3.3 Cosmologie à 5 dimensions

A partir des équations de Friedmann, on peut récupérer le régime à 5 dimensions sans avoir le terme de courbure à 4 dimensions, simplement en tenant $\mu \to \infty$ dans l'équation (3.17) et avec $C = 0$ et la constante cosmologique de la brane et du bulk ($\Lambda = 0$) et ($\rho_B = 0$) respectivement, on obtient:

$$H^2 + \frac{k}{a_0^2} = \frac{\kappa^4}{36}\rho_b^2 \tag{3.19}$$

C'est l'équation de Friedmann à 5 dimensions.

On peut voir maintenant que la gravité 5 dimensions est en effet différente de la gravité à 4 dimensions, il est important de montrer que l'équation de Friedmann du modèle DGP rassemblera à une observation des échelles à 4 dimensions.

3.4 Récupération de la cosmologie standard

L'exigence la plus fondamentale est que le modèle doit s'appliquer avec les observations actuelles, de sorte qu'on peut récupérer la cosmologie standard dans certaines conditions spécifiques [19].

L'équation (3.17) peut s'écrire comme dans la condition où ($\rho_B = 0$ et $C = 0$)

$$\epsilon\sqrt{H^2 + \frac{k}{a_0^2}} = \frac{\kappa^2}{2\mu^2}(H^2 + \frac{k}{a_0^2}) - \frac{\kappa^2}{6}\rho_b$$

$$\frac{2\mu^2}{\kappa^2}\epsilon\sqrt{H^2 + \frac{k}{a_0^2}} = (H^2 + \frac{k}{a_0^2}) - \frac{\mu^2}{3}\rho_b$$

$$\frac{\mu^2}{3}\rho_b = H^2 + \frac{k}{a_0^2} - 2\epsilon\frac{\mu^2}{\kappa^2}\sqrt{H^2 + \frac{k}{a_0^2}} \tag{3.20}$$

Il est maintenant apparu dans l'équation ci-dessus la cosmologie standard à savoir que l'équation de Friedmann à 4 dimensions

$$\frac{8\pi G_{(4)}}{3}\rho_b = H^2 + \frac{k}{a_0^2}, \tag{3.21}$$

est récupérée chaque fois dans la condition suivante:

$$\sqrt{H^2 + \frac{k}{a_0^2}} \gg 2\frac{\mu^2}{\kappa^2} \tag{3.22}$$

Si on suppose que ($k = 0$), la condition ci-dessus devient:

$$H^{-1} \ll \frac{M_{(4)}^2}{2M_{(5)}^3} \tag{3.23}$$

Cela correspond à l'échelle r_c qui définit le croisement entre les régimes de gravité à 4 dimensions et de gravité à 5 dimensions.

En d'autre termes, si le rayon de Hubble[7]actuel est beaucoup plus petit que l'échelle croisée, toutes les mesures et observations de cette échelle ne mesureront qu'en effet la gravité à 4 dimensions et ne pourra pas détecter une dimension supplémentaire.

3.4.1 Cosmologie tardive

Après avoir montrer que le modèle de DGP peut être indétectable dans les observations actuelles, on peut explorer la cosmologie tardive.

En cosmologie, il est intéressant de connaitre le future de développement de l'univers. Il faut voir si la phase actuelle d'accélération de l'expansion est durable ou transitoire.

Si on résoud (3.20) pour $\sqrt{H^2 + \frac{k}{a_0^2}}$, on obtiendra

$$\sqrt{H^2 + \frac{k}{a_0^2}} = \epsilon\frac{\mu^2}{\kappa^2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{3}\rho_b + \frac{\mu^4}{\kappa^4}} \tag{3.24}$$

7. Le rayon de Hubble est une longueur caractéristique définit en cosmologie comme $R_H = c/H$ où c est la vitesse de la lumière et H est le paramètre de Hubble. sa valeur varie au cours de l'expansion cosmologique, et elle vaut aujourd'hui $4,3 \times 10^9$ pc.

Selon le signe de ϵ, l'équation comporte deux branches distinctes de solutions, dans le premier scénario [19][23]

$$\begin{aligned} \epsilon &= -1 \\ k &= 0 \,\mathrm{ou}\, k = -1 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Dans ce cas, (3.24) devient

$$\sqrt{H^2 + \frac{k}{a_0^2}} = -\frac{\mu^2}{\kappa^2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{3}\rho_b + \frac{\mu^4}{\kappa^4}} \tag{3.26}$$

C'est la solution de la brane 1.

Et supposant l'équation d'état pour la matière de la brane sous cette forme

$$p_b = w\rho_b, (\mathrm{avec} w \geq -1) \tag{3.27}$$

Lorsque $a_0 \to \infty$ (a_0 diverge pour le temps tardive), alors que la densité de toutes les matières ($w > -1$) tend vers 0.

$$a_0 \to \infty, \rho_m \to 0 \tag{3.28}$$

Notant que la 1^{re} équation de Friedmann (3.26) prend la forme de

$$\sqrt{H^2 + \frac{k}{a_0^2}} = \frac{\mu^2}{\kappa^2}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{\rho_b}{3\frac{\mu^2}{\kappa^4}}}\right) \tag{3.29}$$

Puisque la densité de matière tend vers 0, elle atteindra un cas où $\rho_b \gg \frac{\mu^2}{\kappa^4}$, dans l'approximation du premier ordre, on peut étendre le terme de racine carré

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + 0(x)$$

Donc

$$\sqrt{1 + \frac{\rho_b}{3\frac{\mu^2}{\kappa^4}}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{\rho_b}{3\frac{\mu^2}{\kappa^4}} = 1 + \frac{1}{6}\frac{\kappa^4\rho_b}{\mu^2} \tag{3.30}$$

On peut alors développer l'équation (3.29) pour obtenir

$$\sqrt{H^2 + \frac{k}{a_0^2}} = \frac{1}{6}\kappa^2 \rho_b \tag{3.31}$$

Qui est le régime complet à 5 dimensions (équation (3.19)), on a donc une transition du régime 4 dimensions à un régime 5 dimensions.

On voit également que la condition $\rho_b \ll \frac{\mu^2}{\kappa^4}$ (qui est équivalent à dire que $\sqrt{H^2 + \frac{k}{a_0^2}} \ll r_c^{-1}$)[8] et dans un univers plat devient $H^{-1} \gg r_c$, cela s'avère être notre condition initiale pour la transition vers la cosmologie à 5 dimensions.

Dans notre 2^{me} scénario, on suppose:

$$\epsilon = 1 \tag{3.32}$$

Dans ce cas, $\sqrt{H^2 + \frac{k}{a_0^2}}$ est toujours plus grand que H_{self} qui est donné par

$$\sqrt{H^2 + \frac{k}{a_0^2}} = \frac{\mu^2}{\kappa^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{\kappa^4 \rho_b}{3\mu^2}}\right) \gg \frac{2\mu^2}{\kappa^2} \equiv H_{self} \tag{3.33}$$

L'équation de Friedmann peut encore avoir 2 branches de solutions, une branche (-) désigne " solution de brane 1", et une branche (+) connue sous le nom de " solution de brane 2".

Notant que H est borné ci dessous par une constante H_{self}, dans le temps tardif on a:

$$\begin{aligned} a_0 &\to \infty \\ H &\to H_{self} \end{aligned} \tag{3.34}$$

On aura alors une solution inflationniste avec une constante H.

$$\begin{aligned} \epsilon &= 1 \\ \rho_b &= 0 \\ H &\text{constante} \end{aligned} \tag{3.35}$$

8. Quand $k = 1$ il est possible que l'univers tourne avant d'arriver au régime où $\rho_b \ll \mu^2/\kappa^4$.

3.4.2 Cosmologie de l'univers dominé par l'énergie fantôme

Il est possible pour le modèle de DGP de présenter des propriétés similaire à celles de l'énergie fantôme [9] [23], c'est à dire d'avoir une équation d'état effective très négative ($w_{eff} < -1$).

Cela est généralement défavorable, car la densité constante toujours croissante viole la conservation de l'énergie, mais dans notre modèle puisque il n'y a pas de fluide physique [10] cela implique qu'on a une équation d'état $w < -1$.

Une simple réalisation de ce cas qui est présenté par Lue et Starkman [?]. la cosmologie à été dérivée de la solution de la brane 1 en supposant un univers plat n'ayant qu'une matière sans pression et une constante cosmologique Λ_b de la brane, dans ce cas l'équation de Friedmann (3.26) devient:

$$\begin{aligned}
H &= -\frac{\mu^2}{\kappa^2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{3}\rho_M + \Lambda_b + \frac{\mu^4}{\kappa^4}} \\
H + \frac{\mu^2}{\kappa^2} &= \sqrt{\frac{\mu^2}{3}\rho_M + \Lambda_b + \frac{\mu^4}{\kappa^4}} \\
H^2 + \frac{\mu^4}{\kappa^4} + 2H\frac{\mu^2}{\kappa^2} &= \frac{\mu^2}{3}\rho_M + \Lambda_b + \frac{\mu^4}{\kappa^4} \\
H^2 &= \frac{\mu^2}{3}\rho_M + \left(\Lambda_b - 2H\frac{\mu^2}{\kappa^2}\right) \qquad (3.36)
\end{aligned}$$

Notant à la fin qu'on a mis l'équation sous une forme similaire à une équation standard de Friedmann $H^2 = \frac{\mu^2}{3}\rho_M + \Lambda_{eff}$. Afin qu'on puisse interpréter le dernier terme comme une constante cosmologique efficace $\Lambda_{eff} = \Lambda_b - 2H\frac{\mu^2}{\kappa^2}$, puisque H est une fonction décroissante, Λ_{eff} augmente avec le temps.

Cela montre un comportement similaire à celui d'une énergie fantôme qui peut alors donner un meilleur ajustement aux données actuelles observées.

9. Désigne une forme hypothétique d'énergie dont la densité aurait la particularité d'augmenter lors de l'expansion de l'univers, elle est un candidat potentiel de l'énergie noire.

10. aucune densité de fluide cosmique divergent au temps tardive

3.4.3 Brane intégrée dans l'espace-temps de Minkowski

On doit envisager dans ce paragraphe comment intégrer correctement la brane dans le bulk.

On suppose un espace plat ou un espace de Minkowski [19][21], et pour calculer la métrique restreinte, on considéra d'abord une surface mince de l'univers à 5 dimensions centrée autour $y = 0$, dans la métrique(2.6) les termes à calculer sont $a(\tau, y)$,$b(\tau, y)$ et $n(\tau, y)$.

Par une redéfinition de y et en supposant que b soit indépendant du temps, on peut obtenir

$$b_0(\tau) \equiv b(\tau, 0) = 1 \tag{3.37}$$

Où on a utilisé l'indice 0 pour désigner la valeur à $y = 0$ puis à partir de terme (05) de l'équation d'Einstein (2.29), on trouve

$$\frac{\dot{a}_0^{'}}{\dot{a}_0} = \frac{n_0^{'}}{n_0} \tag{3.38}$$

on intégre par rapport à y, on trouve

$$\begin{aligned} \ln(\dot{a}_0) &= \ln(n_0) + \ln(\alpha(\tau)) = \ln(n_0\alpha(\tau)) \\ \Rightarrow \frac{\dot{a}_0}{n_0} &= \alpha(\tau) \end{aligned} \tag{3.39}$$

Où $\alpha(\tau)$ est une fonction qui dépend seulement du temps. Par un changement de temps approprié, on a

$$n_0 = 1 \tag{3.40}$$

Alors (3.39) devient

$$\alpha = \dot{a}_0 \tag{3.41}$$

Maintenant on a b_0 et n_0 pour obtenir a_0 on doit regarder en arrière $F(\tau, y)$ dans l'équation (2.30), et comme on a considérer une surface mince autour de $y = 0$, on peut substituer $b_0 = n_0 = 1$ dans l'équation (2.30), et trouver

$$F(\tau, y) = (a^{'}a)^2 - \alpha^2 a^2 - ka^2 \tag{3.42}$$

D'autre part, si on met $\rho_B = 0$ le tenseur énergie impulsion n'a que la contribution brane et l'équation (2.31) devient

$$\begin{aligned} F^{'} &= -\frac{2a^3a^{'}}{3n^2}\tilde{G}_{00} = -\frac{2a^3a^{'}}{3n^2}\kappa^2(\tilde{T}_{00} + \tilde{U}_{00}) \\ &= -\frac{2a^3a^{'}}{3n^2}\kappa^2(\tilde{T}_0^A\tilde{g}_{A0} + \tilde{U}_{00}) \\ &= -\frac{2a^3a^{'}}{3n^2}\kappa^2(\frac{\delta(y)}{b}\rho_b n^2 + \tilde{U}_{00}) \end{aligned} \tag{3.43}$$

En substituant $\tilde{U}_{00}$ de l'équation (2.25) dans (3.43)

$$\begin{aligned} F^{'} &= -\frac{2a^3a^{'}}{3n^2}\kappa^2\left[\frac{\delta(y)}{b}\rho_b n^2 + \frac{3\delta(y)}{a^2\mu^2 b}\left(\dot{a}^2+kn^2\right)\right] \\ &= -\frac{2a^3a^{'}\kappa^2\delta(y)}{3b}\rho_b + \frac{2aa^{'}\kappa^2\delta(y)}{n^2\mu^2 b}\left(\dot{a}^2+kn^2\right) \end{aligned} \tag{3.44}$$

Encore, on peut substitue $b_0 = n_0 = 1$ et $\alpha = \dot{a}_0$ dans l'équation et on obtient

$$F^{'} = -\frac{2a^3a^{'}\kappa^2\delta(y)}{3}\rho_b + \frac{2aa^{'}\kappa^2\delta(y)}{\mu^2}\left(\alpha^2+k\right) \tag{3.45}$$

Cependant, si on différentie l'équation (3.42) directement

$$F^{'}(\tau,y) = 2(a^{'}a)(a^{'}a)^{'} - 2\alpha^2aa^{'} - 2kaa^{'} \tag{3.46}$$

On peut égaler ces deux équation

$$\begin{aligned} 2a^{'}a(a^{'}a)^{'} - 2\alpha^2aa^{'} - 2kaa^{'} &= -\frac{2a^3a^{'}\kappa^2\delta(y)}{3}\rho_b + \frac{2aa^{'}\kappa^2\delta(y)}{\mu^2}\left(\alpha^2+k\right) \\ (a^{'}a)^{'} - \alpha^2 - k &= -\frac{a^2\kappa^2\delta(y)}{3}\rho_b + \frac{\kappa^2\delta(y)}{\mu^2}\left(\alpha^2+k\right) \end{aligned} \tag{3.47}$$

on intégre l'équation dans le bulk pour $y > 0$, alors les termes de $\delta(y)$ disparaissent, on a

$$a^{'}a = (\alpha^2+k)y + D \tag{3.48}$$

Pour calculer la constante d'intégration, en évaluant la fonction à (0+)

$$D = a^{'}(0+)a_0 = \frac{1}{2}[a^{'}]a_0 \tag{3.49}$$

Et en supposant encore la symétrie $y \leftrightarrow -y$, l'équation (3.48) peut s'écrire comme

$$\frac{1}{2}(a^2)^{'} = (\alpha^2+k)y + \frac{1}{2}[a^{'}]a_0 \tag{3.50}$$

En intégrant

$$a^2 = (\alpha^2+k)y + [a^{'}]a_0 + E \tag{3.51}$$

Pour $y < 0$, la constante d'intégration D est

$$D = a^{'}(0-)a_0 = -\frac{1}{2}[a^{'}]a_0 \tag{3.52}$$

Par conséquent l'équation du bulk dans son ensemble est

$$a^2 = (\alpha^2+k)y + [a^{'}]a_0|y| + E \tag{3.53}$$

en évaluant la fonction à $y = 0$

$$a_0^2 = E \tag{3.54}$$

Finalement on obtient l'expression de a^2 comme une forme quadratique de y

$$a^2 = (\dot{a}^2 + k)y^2 + [a^{'}]a_0|y| + a_0^2 \tag{3.55}$$

Pour développer pleinement l'expression de a qu'on a trouvé, on peut se substituer à la condition de jonction $[a^{'}]$ (3.16) avec $b_0 = n_0 = 1$

$$a = a_0 \left\{ 1 + |y| \left[-\frac{\kappa^2}{3}\rho_b + \frac{\kappa^2}{\mu^2}\left(H^2 + \frac{k}{a_0^2}\right)\right] + y^2 \left(H^2 + \frac{k}{a_0^2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{3.56}$$

Remplaçant dans l'équation de Friedmann (3.17) pour $C = 0$ et $\rho_B = 0$, on trouve

$$a = a_0 \left\{ 1 + 2\epsilon|y|\sqrt{H^2 + \frac{k}{a_0^2}} + y^2 \left(H^2 + \frac{k}{a_0^2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{3.57}$$

Puisque y est petit dans la surface mince de l'univers qu'on envisage, l'équation peut être encore simplifié, on peut aussi obtenir n en utilisant $n = \frac{\dot{a}}{\dot{a}_0}$.
D'où les termes de la métrique prés de la brane sont

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \epsilon|y|(\dot{a}_0^2 + k)^{1/2} \\ n = \frac{\dot{a}}{\dot{a}_0} &= 1 + \epsilon|y|(\ddot{a})(\dot{a}_0^2 + k)^{-1/2} \\ b &= 1 \end{aligned} \tag{3.58}$$

Avec ça on a trouvé les expressions de a, n et b dans la brane.
Dans ce chapitre, les équations de Friedmann dans la deuxième section portent des idées sur l'évolution de l'univers.

Avec tout ces informations, on a trouvé des conditions initiales qui permettent de passer du régime à 4 dimensions vers le régime complet à 5 dimensions, on a compris bien les propriétés de ce modèle ainsi que leur cosmologie.

CHAPITRE 4

Solutions cosmologiques

Après avoir trouvé la première équation de Friedmann, on peut la résoudre pour avoir une solution cosmologique de l'univers. A la recherche de cette solution, on sera restreint à l'équation de la brane.

4.1 Solutions cosmologiques

On commence par réécrire l'équation de Friedmann (3.17) en utilisant l'expression de r_c [22]

$$\begin{aligned} \epsilon\sqrt{H^2 - \frac{\mu^2 r_c}{3}\rho_B - \frac{C}{a^4} + \frac{k}{a^2}} &= r_c\left[\left(H^2 + \frac{k}{a^2}\right) - \frac{\mu^2}{3}\rho_b\right] \\ H^2 - \frac{\mu^2 r_c}{3}\rho_B - \frac{C}{a^4} + \frac{k}{a^2} &= r_c^2\left[\left(H^2 + \frac{k}{a^2}\right)^2 - \frac{2\mu^2\rho_b}{3}\left(H^2 + \frac{k}{a^2}\right) + \frac{\mu^4\rho_b^2}{9}\right] \end{aligned} \tag{4.1}$$

Après simplification, on trouve

$$\left(H^2 + \frac{k}{a^2}\right)^2 - \left(\frac{2\mu^2\rho_b}{3} + \frac{1}{r_c^2}\right)\left(H^2 + \frac{k}{a^2}\right) + \frac{\mu^4\rho_b^2}{9} + \frac{\mu^2}{3r_c}\rho_B + \frac{C}{a^4 r_c^2} = 0 \tag{4.2}$$

On résoudre cette équation

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{\mu^2\rho_b}{3} + \frac{1}{2r_c^2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2\rho_b}{3r_c^2} + \frac{1}{4r_c^4} - \frac{\mu^2}{3r_c}\rho_B - \frac{C}{a^4 r_c^2}} \tag{4.3}$$

On trouve les deux branches de solutions

Pour la brane 1

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{\mu^2\rho_b}{3} + \frac{1}{2r_c^2} - \sqrt{\frac{\mu^2\rho_b}{3r_c^2} + \frac{1}{4r_c^4} - \frac{\mu^2}{3r_c}\rho_B - \frac{C}{a^4 r_c^2}} \tag{4.4}$$

Pour la brane 2

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{\mu^2 \rho_b}{3} + \frac{1}{2r_c^2} + \sqrt{\frac{\mu^2 \rho_b}{3r_c^2} + \frac{1}{4r_c^4} - \frac{\mu^2}{3r_c}\rho_B - \frac{C}{a^4 r_c^2}} \tag{4.5}$$

On peut voir maintenant la récupération de la cosmologie standard en supposant $H \gg r_c^{-1}$, donc l'équation (4.3) devient

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{\mu^2 \rho_b}{3} \tag{4.6}$$

Rappelant qu'on a l'équation de continuité

$$\dot{\rho} + 3H(p + \rho) = 0 \tag{4.7}$$

à partir de cette équation on peut obtenir l'équation d'évolution des densités de fluide en terme de décalage vers le rouge

$$\rho = \rho_0 (1+z)^{3(1+w)} \tag{4.8}$$

Si on suppose la constante d'intégration $C = 0$, on peut aussi exprimer l'équation de Friedmann (4.3) dans la forme suivante

$$\frac{H^2(z)}{H_0^2} = \Omega_k (1+z)^2 + \sum_\alpha \Omega_\alpha (1+z)^{3(1+w_\alpha)} + 2\Omega_{r_c} \pm 2\sqrt{\Omega_{r_c}} \sqrt{\sum_\alpha \Omega_\alpha (1+z)^{3(1+w_\alpha)} + \Omega_{r_c} + \Omega_B} \tag{4.9}$$

Avec

$$\begin{aligned} \Omega_k &\equiv -\frac{k}{H_0^2 a_0^2} \\ \Omega_\alpha &\equiv \frac{\mu^2 \rho_\alpha^0}{3H_0^2 a_0^{3(1+w_\alpha)}} \\ \Omega_{r_c} &\equiv \frac{1}{4r_c^2 H_0^2} \\ \Omega_B &\equiv -\frac{\kappa^2 \rho_B}{6H_0^2} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Les fluides cosmiques avec différentes équations d'état dans la brane sont présentés par Les ρ_α tandis que ρ_B est la constante cosmologique dans le bulk.

Dans notre mémoire, on concentre sur la matière non relativiste (baryons [1] et matière noir [2]) et la constante cosmologique dans la brane.

1. la matière baryonique est la matière composée principalement de baryons, cela inclus les atomes et donc à peu près la totalité de la matière ordinaire.

2. elle présente la matière qui n'interagit pas avec le rayonnement électromagnétique c'est à dire qui est difficile à détecter.

Donc H devient [23]

$$\frac{H^2(z)}{H_0^2} = \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_M(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + 2\Omega_{r_c} \pm 2\sqrt{\Omega_{r_c}}\sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_{r_c} + \Omega_B} \tag{4.11}$$

C'est l'expression du paramètre de Hubble dans le modèle de DGP.

Comparant notre résultat avec le modèle standard [3] dont ses équations conventionnelles sont

$$\begin{aligned} H^2(z) &= H_0^2\left[\Omega_k(1+z)^2 + \Omega_M(1+z)^3 + \Omega_X(1+z)^{3(1+w_X)}\right] \\ \Omega_k &+ \Omega_M + \Omega_X = 1 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Avec Ω_X est le paramètre de densité de l'énergie noir.

Il est claire que pour $\Omega_{r_c} = 0$ cela correspond au cas $r_c \to \infty$, on équivalent à $\kappa \to \infty$, quand le terme de l'action à 5 dimensions disparait. Dans ce modèle, on a une contrainte sur les paramètres qui est la condition de normalisation [22, 23] à $Z = 0$, l'équation (4.11) devient

$$1 = \Omega_k + \Omega_M + \Omega_\Lambda + 2\Omega_{r_c} \pm 2\sqrt{\Omega_{r_c}}\sqrt{\Omega_M + \Omega_\Lambda + \Omega_{r_c} + \Omega_B} \tag{4.13}$$

Cela met une contrainte sur le paramètre et supprime un degré de liberté.
Dans un univers plat sans constante cosmologique, $\Omega_k = \Omega_\Lambda = \Omega_B = 0$, et on a donc

$$\begin{aligned} 1 &= \Omega_M + 2\Omega_{r_c} + 2\Omega_{r_c} \pm \sqrt{\Omega_{r_c}}\sqrt{\Omega_M} \\ 1 &= \left(\sqrt{\Omega_M + \Omega_{r_c}} \pm \sqrt{\Omega_{r_c}}\right)^2 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Supposant que $\Omega_M \geq 0$, par conséquent

$$\begin{aligned} 1 &= \sqrt{\Omega_M + \Omega_{r_c}} \pm \sqrt{\Omega_{r_c}} \\ 1 \mp \sqrt{\Omega_{r_c}} &= \sqrt{\Omega_M + \Omega_{r_c}} \\ 1 \mp 2\sqrt{\Omega_{r_c}} &= \Omega_M \end{aligned} \tag{4.15}$$

Pour la brane 1

$$\sqrt{\Omega_{r_c}} = \frac{\Omega_M - 1}{2} \tag{4.16}$$

3. le modèle standard de la cosmologie décrit à l'heur actuelle des grandes étapes de l'histoire de l'univers observable, ainsi son contenue actuel tels qu'ils sont révélés par les observations astronomiques.

Pour la brane 2

$$\sqrt{\Omega_{r_c}} = \frac{1 - \Omega_M}{2} \tag{4.17}$$

à partir des observations Ω_M est très probable juste dans l'ordre de 0 à 1, donc la brane 1 ne peut pas être plat sans constante cosmologique.

4.1.1 Distance de luminosité et distance angulaire

La distance de luminosité en terme de décalage vers le rouge est donné par[1]

$$d_L = (1+z) \int_0^z \frac{dx}{H(x)} \tag{4.18}$$

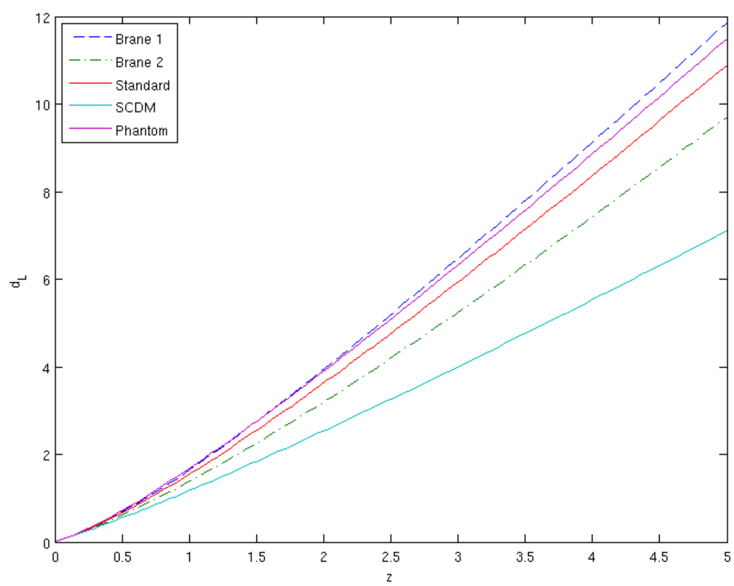

Figure 1: Distance de luminosité de différents modèles Brane 1 et Brane 2, SCDM avec $\Omega_M = 1$, ΛCDM avec une constante cosmologique, et le dernier modèle d'énergie Fantôme de $\omega = -1.5$. Dans ces modèle on suppose $\Omega_k = \Omega_B = 0$ et $\Omega_M = 0.3$, $\Omega_{r_c} = 0.3$ pour les Brane 1 et 2, $\Omega_\Lambda = 0.7$ pour ΛCDM et modèle d'énergie fantôme.

A partir du graphe on peut déduire que avec $\Omega_M = 0,3$, la solution de la brane 1 sera réduite à un modèle d'énergie fantôme de densité d'état négative $w < -1$, la brane 2 ressemble à un modèle avec $-1 < w < 0$, mais il se développent rapidement que le modèle $SCDM$ qui est dominé par la matière [23].

Pour z grand et à partir de (4.11) on voit que

$$H_{SCDM} \leq H_{Brane2} \leq H_{\Lambda CDM} \leq H_{Brane1} \leq H_{ds} \tag{4.19}$$

Où le dernier terme correspond à un univers de De Sitter.

$$d_L^{SCDM} \leq d_L^{Brane2} \leq d_L^{\Lambda CDM} \leq d_L^{Brane1} \leq d_L^{ds} \tag{4.20}$$

On remarque le modèle d'énergie fantôme montre un modèle similaire à la brane 1 pour z petit. C'est à dire z grand la brane 1 a une grande distance de luminosité.
D'autre part, la distance de diamètre angulaire [22] qui indépendante de H_0 et qui est définit par

$$d_A = \frac{d_M}{1+z} = \frac{d_L}{(1+z)^2} \tag{4.21}$$

Toutes les discussions pour la distance de luminosité sont applicable pour cette distance.

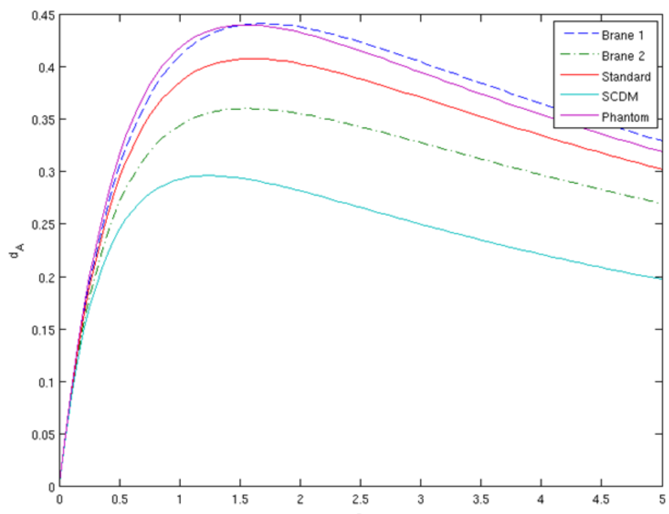

Figure 2: Distance de diamètre angulaire de différents modèles: Branes 1 et 2, SCDM avec $\Omega_M = 1$, ΛCDM avec une constante cosmologique, et le dernier modèle d'énergie Fantôme de $\omega = -1.5$. Dans ces modèle on suppose $\Omega_k = \Omega_B = 0$ et $\Omega_M = 0.3$, $\Omega_{r_c} = 0.3$ pour les Brane 1 et 2, $\Omega_\Lambda = 0.7$ pour ΛCDM et modèle d'énergie fantôme.

4.1.2 Paramètre de décélération

Il est calculé à partir du paramètre de Hubble par $q = -\ddot{a}/aH^2$, en cosmologie il est pratique d'utiliser le décalage vers le rouge, donc il devient [23]

$$q(z) = \frac{H'(z)}{H(z)}(1+z) - 1 \tag{4.22}$$

La dérivation du paramètre de Hubble dans l'équation (4.11) donne sa valeur actuelle qui est donnée par

$$\frac{2H^2(z)H^{'}(z)}{H_0^2} = 2\Omega_k(1+z) + 3\Omega_M(1+z)^2 \pm \sqrt{\Omega_{r_c}}\frac{3\Omega_M(1+z)^2}{\sqrt{\Omega_M(1+z)^3+\Omega_\Lambda+\Omega_{r_c}+\Omega_B}} \tag{4.23}$$

Si on évalue l'équation (4.23) dans le cas où $z = 0$, on obtient

$$2\frac{H_0^{'}}{H_0} = 2\Omega_k + 3\Omega_M \pm \sqrt{\Omega_{r_c}}\frac{3\Omega_M}{\sqrt{\Omega_M+\Omega_\Lambda+\Omega_{r_c}+\Omega_B}} \tag{4.24}$$

Alors q_0 est donné par

$$q_0 = \Omega_k + \frac{3\Omega_M}{2}\left(1 \pm \frac{\sqrt{\Omega_{r_c}}}{\sqrt{\Omega_M+\Omega_\Lambda+\Omega_{r_c}+\Omega_B}}\right) - 1 \tag{4.25}$$

Si $\Omega_k = 0$, donc q_0

$$q_0 = \frac{3\Omega_M}{2}\left(1h \pm \sqrt{\frac{\Omega_{r_c}}{\Omega_M+\Omega_\Lambda+\Omega_{r_c}+\Omega_B}}\right) - 1 \tag{4.26}$$

Une condition proposée pour avoir un univers plat qui est accélére actuellement est la suivante

$$\frac{3\Omega_M}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{\Omega_{r_c}}{\Omega_M+\Omega_\Lambda+\Omega_{r_c}+\Omega_B}}\right) < 1 \tag{4.27}$$

La solution de la brane 1 montre un comportement similaire au modèle d'énergie fantôme avec une accélération plus grande que le modèle ΛCDM.
Par contre, la solution de la brane 2 montre une accélération plus petite par rapport au ΛCDM. On déduit donc pour atteindre une accélération dans le temps actuel, nos modèles nécessite un tel réglage

- On peut proposer que le modèle de la brane 1 a besoin $\Omega_M \gg 0$ pour freiner l'accélération.
- Le modèle de la brane 2 a besoin d'un $\Omega_M \ll 0$ pour améliorer l'accélération.

4.1.3 Equation d'état effective

Pour avoir que la solution de la brane 1 ressemble à un modèle d'énergie fantôme, on peut essayer de définir une équation d'état effective puis comparant le modèle avec celle du modèle standard.

Pour le modèle ΛCDM, donc $H^{'}$ est donné par

$$2H(z)H^{'}(z) = H_0^2[2\Omega_k(1+z) + 3\Omega_M(1+z)^2 + 3(1+\omega_X)\Omega_X(1+z)^{3(1+\omega_X)-1}] \quad (4.28)$$

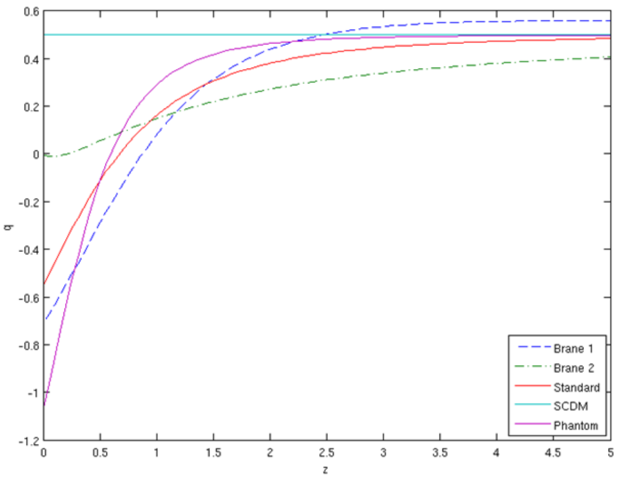

Figure 3: Paramètre de décécélération, q de différents modèles: Branes 1 et 2, SCDM avec $\Omega_M = 1$, ΛCDM avec une constante cosmologique, et le dernier modèle d'énergie Fantôme de $\omega = -1.5$. Dans ces modèle on suppose $\Omega_k = \Omega_B = 0$ et $\Omega_M = 0.3$, $\Omega_{r_c} = 0.3$ pour les Brane 1 et 2, $\Omega_\Lambda = 0.7$ pour ΛCDM et modèle d'énergie fantôme.

Donc $q(z)$ est donné par

$$\begin{aligned} q(z) &= \frac{2\Omega_k(1+z)^2 + 3\Omega_M(1+z)^3 + 3(1+w_X)\Omega_X(1+z)^{3(1+w_X)}}{\Omega_k(1+z)^2 + \Omega_M(1+z)^3 + \Omega_X(1+z)^{3(1+w_X)}} - 1 \\ &= \frac{\Omega_k(1+z)^2 + 2\Omega_M(1+z)^3 + (2+3w_X)\Omega_X(1+z)^{3(1+w_X)}}{\Omega_k(1+z)^2 + \Omega_M(1+z)^3 + \Omega_X(1+z)^{3(1+w_X)}} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Supposant que $\Omega_k = 0$, et à partir de la condition de normalisation (4.12) on obtient $\Omega_x = 1 - \Omega_M$ et avec $z = 0$, on trouve

$$q_0 = 2\Omega_M + (2+3w_X)(1-\Omega_M) \quad (4.30)$$

Par réorganisation des termes, on trouve l'expression de w_X en terme de densité relative

$$w_X = \frac{2q_0 - 1}{3(1-\Omega_M)} \quad (4.31)$$

On a besoin maintenant d'une densité d'état relative de la matière [23]

$$\Omega_M(z) = \frac{H_0^2}{H^2(z)}\Omega_M(0)(1+z)^3 \quad (4.32)$$

Avec $\Omega_M(0)$ est le paramètre actuelle de Ω_M qui permet de voir l'évolution de l'équation d'état effective.

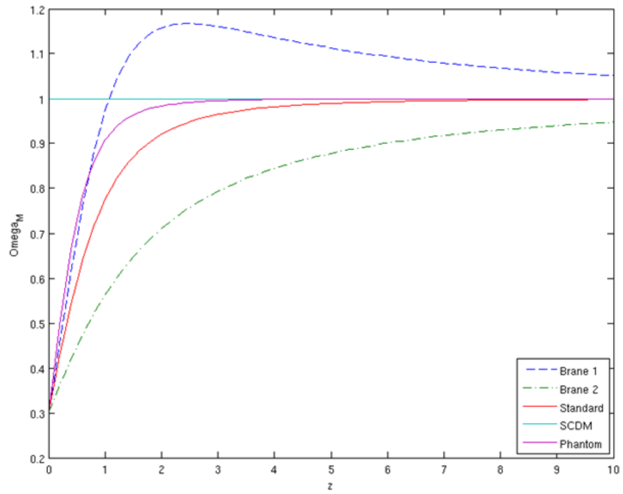

Figure 4: Ω_M dépendant du temps de différents modèles: Branes 1 et 2, SCDM avec $\Omega_M = 1$, ΛCDM avec une constante cosmologique, et le dernier modèle d'énergie Fantôme de $\omega = -1.5$. Dans ces modèle on suppose $\Omega_k = \Omega_B = 0$ et $\Omega_M = 0.3$, $\Omega_{r_c} = 0.3$ pour les Brane 1 et 2, $\Omega_\Lambda = 0.7$ pour ΛCDM et modèle d'énergie fantôme.

En utilisant $q(z)$ et $\Omega_M(z)$ qui dépendent de temps, on peut écrire une équation d'état effective pour le modèle de DGP sous cette forme [23]

$$w_{eff}(z) = \frac{2q(z) - 1}{3[1 - \Omega_M(z)]} \tag{4.33}$$

Sa valeur actuelle

$$w_{eff}(0) = \frac{2q_0 - 1}{3(1 - \Omega_M)} = -1 \pm \frac{\Omega_M}{1 - \Omega_M}\sqrt{\frac{\Omega_{r_c}}{\Omega_M + \Omega_\Lambda + \Omega_{r_c} + \Omega_B}} \tag{4.34}$$

Pour la brane 1 $w_{eff}(0) < -1$ Similaire à l'énergie fantôme.

Pour la brane 2 $-1 < w < 0$ qui se trouve entre le modèles ΛCDM et le modèle[4] SCDM.

4. SCDM "Standard Cold Dark Matter" désigne un modèle cosmologique représentant un univers homogène et isotrope, dont la courbure spatiale est nulle, il contient la matière noir et plus de la matière ordinaire

La brane 1 a un comportement similaire à une énergie fantôme même pour z petit, et notant que $w(z)$ montre une singularité à $z \approx 1$ car Ω_M prend la valeur d'unité à cette valeur. D'autre manière, si on trace directement on rencontre à une singularé pour la brane 1 à z fini.
Supposant que $\Omega_k = 0$, et pour le temps tardif lorsque $z \to -1$ pour la brane 1 et 2, donc $q(z) \to -1$ et $\Omega_M(z) \to 0$ donc, $w_{eff} \to 0$. Pour z est grand

$$q(z) \approx \frac{1}{2} \mp \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\Omega_{r_c}}{\Omega_M}}(1+z)^{-3/2} \tag{4.35}$$

Tandis que $\Omega_M(z)$ (4.32) devient au premier ordre

$$\Omega_M(z) \approx 1 \mp 2\sqrt{\frac{\Omega_{r_c}}{\Omega_M}}(1+z)^{-3/2} \tag{4.36}$$

Dans le temps précoce quand z est grand on obtient $w_{eff}(z) \to -0,5$ pour les deux branes. et qui est différent de l'énergie fantôme.
En plus de la solution cosmologique, Il existe d'autres domaines du modèle DGP qui mérite d'être examinés comme les généralisations prometteuses du modèle proposées par les cosmologistes. Dans cette section, on présente certains travaux qu'on a traité brèèement.

4.2 Solution de Schwarzschild

L'étude de toute théorie de gravité nécessite de considérer une solution locale, on choisie un des scénarios les plus connus qui est la solution de Schwarzschild [5]. Dans ce contexte, on essaye de construire une solution locale basée sur une seul masse sphérique sans autre source d'énergie remarquable à proximité. D'autre part, on va essayer de répéter le processus avec d'autre forme de la métrique.
Maintenant, en essaye de construire une solution avec une symétrie sphérique à 3 dimensions et avec toute l'énergie concentrée au centre, on propose donc la métrique suivante

$$ds^2 = -e^{N(r,y)}dt^2 + e^{A(r,y)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + dy^2 \tag{4.37}$$

5. Dans le cadre de la relativité générale, la métrique de Schwarzschild est une solution des équations d'Einstein. Elle décrit la géométrie de l'espace-temps lorsqu'elle est déformée par le champ gravitationnel d'une masse sphérique, statique (sans rotation). Cette masse peut être une étoile, une planète ou un trou noire de Schwarzschild.

Elle ressemble à la métrique pour la solution de Schwarzschild, la forme exponentielle de la métrique assure la sensibilité du coefficients spatial et on considère une $5^{\text{ème}}$ dimension simple et plate avec la coordonnée y.

On calcule les symboles de Christoffel comme dans le cas précédant, les variables sont différents, le point correspond à une dérivée par rapport à r tandis que le prime correspond à une dérivée par rapport à y.

$$
\begin{array}{ccc}
\Gamma^t_{tt} = 0 & \Gamma^r_{tt} = \frac{1}{2}e^{N-A}\dot{N} & \Gamma^y_{tt} = \frac{1}{2}e^{N}N' \\
\Gamma^t_{tr} = \frac{1}{2}\dot{N} & \Gamma^r_{tr} = 0 & \Gamma^y_{tr} = 0 \\
\Gamma^t_{ty} = \frac{1}{2}N' & \Gamma^r_{ty} = 0 & \Gamma^y_{ty} = 0 \\
\Gamma^t_{rr} = 0 & \Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\gamma^{im}(\gamma_{mk,j} + \gamma_{mj,k} - \gamma_{jk,m}) & \Gamma^y_{rr} = -\frac{1}{2}e^{A}A' \\
\Gamma^t_{ry} = 0 & \Gamma^r_{ry} = \frac{1}{2}A' & \Gamma^y_{yr} = 0 \\
\Gamma^t_{yy} = 0 & \Gamma^r_{yy} = 0 & \Gamma^y_{yy} = 0
\end{array}
$$

A partir des symboles de Christoffel, on peut calculer le tenseur de Ricci du bulk, on trouve

$$
\begin{aligned}
R_{tt} &= \frac{e^N}{2}\left(N'' + \frac{N'^2}{2} + \frac{N'A'}{2}\right) + e^{N-A}\left(\frac{\ddot{N}}{2} + \frac{\dot{N}^2}{4} - \frac{\dot{N}\dot{A}}{4} + \frac{\dot{N}}{r}\right) \\
R_{rr} &= \frac{e^A}{2}\left(-A'' - \frac{N'A'}{2} - \frac{A'^2}{2}\right) - \frac{\ddot{N}}{2} - \frac{\dot{N}^2}{4} + \frac{\dot{N}\dot{A}}{4} + \frac{\dot{A}}{r} \\
R_{\theta\theta} &= 1 - e^{-A} - \frac{e^{-A}r^2}{2}\left(\frac{\dot{N}}{r} - \frac{\dot{A}}{r}\right) \\
R_{\phi\phi} &= \sin^2\theta - e^{-A}\sin^2\theta - \frac{e^{-A}r^2\sin^2\theta}{2}\left(\frac{\dot{N}}{r} - \frac{\dot{A}}{r}\right) \\
R_{yy} &= -\frac{N''}{2} - \frac{A''}{2} - \frac{N'^2}{4} - \frac{A'^2}{4} \\
R_{ry} &= -\frac{\dot{N}}{4}(N' - A') + \frac{A'}{r} - \frac{\dot{N}'}{2}
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

Les tenseurs d'Einstein du bulk sont donnés par

$$
\begin{aligned}
G_{tt} &= e^{N}\left(\frac{A''}{2}-\frac{A'^2}{4}+\frac{1}{r^2}\right)+e^{N-A}\left(\frac{\dot{A}}{r}-\frac{1}{r^2}\right)\\
G_{rr} &= e^{A}\left(\frac{N''}{2}+\frac{N'^2}{4}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{\dot{N}}{r}+\frac{1}{r^2}\\
G_{\theta\theta} &= \frac{r^2}{2}\left(N''+A''+\frac{N'^2}{2}+\frac{N'A'}{2}+\frac{A'^2}{2}\right)+\frac{e^{-A}r^2}{2}\left(\ddot{N}+\frac{\dot{N}^2}{2}-\frac{\dot{N}\dot{A}}{2}+\frac{\dot{N}}{r}-\frac{\dot{A}}{r}\right)\\
G_{\phi\phi} &= \frac{r^2\sin^2\theta}{2}\left(N''+A''+\frac{N'^2}{2}+\frac{N'A'}{2}+\frac{A'^2}{2}\right)+\frac{e^{-A}r^2\sin^2\theta}{2}\left(\ddot{N}+\frac{\dot{N}^2}{2}-\frac{\dot{N}\dot{A}}{2}+\frac{\dot{N}}{r}-\frac{\dot{A}}{r}\right)\\
G_{yy} &= \frac{N'A'}{4}-\frac{1}{r^2}+e^{-A}\left(\frac{\ddot{N}}{2}+\frac{\dot{N}^2}{4}-\frac{\dot{N}\dot{A}}{4}+\frac{\dot{N}}{r}-\frac{\dot{A}}{r}+\frac{1}{r^2}\right)\\
G_{ry} &= -\frac{\dot{N}}{4}(N'-A')+\frac{A'}{r}-\frac{\dot{N}'}{2}
\end{aligned}
\tag{4.39}
$$

On va résoudre les équations en supposant un espace vide, c'est à dire $T_{AB}=0$. la partie source de l'équation ne se compose pas que du terme de courbure scalaire, à partir de l'expression du tenseur d'Einstein U_{AB} peut être trouvé simplement en supprimant les termes impliquant la différentiation par rapport à y et en ajoutant le coefficient $\delta(y)$:

$$
\begin{aligned}
U_{tt} &= -\frac{\delta(y)}{\mu^2}\left(e^{N-A}\left(\frac{\dot{A}}{r}-\frac{1}{r}\right)+\frac{e^{N}}{r^2}\right)\\
U_{rr} &= -\frac{\delta(y)}{\mu^2}\left(\frac{\dot{N}}{r}+\frac{1}{r^2}-\frac{e^{A}}{r^2}\right)\\
U_{\theta\theta} &= -\frac{e^{-A}r^2\delta(y)}{2\mu^2}\left(\ddot{N}+\frac{\dot{N}^2}{2}-\frac{\dot{N}\dot{A}}{2}+\frac{\dot{N}}{r}-\frac{\dot{A}}{r}\right)\\
U_{\phi\phi} &= -\frac{e^{-A}r^2\sin^2\theta\,\delta(y)}{2\mu^2}\left(\ddot{N}+\frac{\dot{N}^2}{2}-\frac{\dot{N}\dot{A}}{2}+\frac{\dot{N}}{r}-\frac{\dot{A}}{r}\right)
\end{aligned}
\tag{4.40}
$$

On peut maintenant considèrer les conditions aux limites de la brane. En supposant une discontinuité dans A' en $y=0$ et donc en $\delta(y)$ des deux cotés aux équations pour obtenir

$$
\begin{aligned}
A' &= -\frac{\kappa^2}{\mu^2}\left[e^{-A}\left(\frac{\dot{A}}{r}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}\right]\\
N' &= -\frac{\kappa^2}{\mu^2}\left[e^{-A}\left(\frac{\dot{N}}{r}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2}\right]\\
N'+A' &= -\frac{\kappa^2e^{-A}}{2\mu^2}\left(\ddot{N}+\frac{\dot{N}^2}{2}-\frac{\dot{A}\dot{N}}{2}+\frac{\dot{N}}{r}-\frac{\dot{A}}{r}\right)
\end{aligned}
\tag{4.41}
$$

Notant qu'on a également supposé une symétrie $\mathbb{Z}^2$ et remplaçant $[A^{'}] = 2A^{'}(0+)$ dans l'équation.

Combinant ces équations, on trouve

$$\begin{aligned}
-\frac{\kappa^2 e^{-A}}{\mu^2}\left(\frac{\dot{A}}{r}+\frac{\dot{N}}{r}\right) = -\frac{\kappa^2 e^{-A}}{2\mu^2}\left(\ddot{N}+\frac{\dot{N}^2}{2}-\frac{\dot{A}\dot{N}}{2}+\frac{\dot{N}}{r}-\frac{\dot{A}}{r}\right)\\
\frac{e^{-A}}{2\mu^2}\left(\ddot{N}+\frac{\dot{N}^2}{2}-\frac{\dot{A}\dot{N}}{2}-\frac{\dot{N}}{r}-\frac{3\dot{A}}{r}\right) = 0
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Cela donne une première équation simplifiée des équation d'Einstein. On a encore besoin d'une équation pour résoudre les deux variables A et N.

Semblable à la section précédente, on va essayer de trouver une partie intégrante de l'équation d'Einstein en définissant $F(r,y)$

$$F(r,y) = e^N N^{'2} + e^{N-A}\dot{N}^2 \tag{4.43}$$

On calcule $F^{'}$ et $\dot{F}$ et les relie au tenseur d'Einstein

$$\begin{aligned}
F^{'} &= e^N N^{'3} + 2e^N N^{'} N^{''} + e^{N-A}\dot{N}^2(N^{'}-A^{'}) + 2e^{N-A}\dot{N}\dot{N}^{'}\\
&= 4e^N N^{'}\underbrace{\left(\frac{1}{2}N^{''}+\frac{1}{4}N^{'2}\right)}_{G_{rr}} + 4e^{N-A}\dot{N}\underbrace{\left(\frac{\dot{N}}{4}(N^{'}-A^{'})+\frac{\dot{N}^{'}}{2}\right)}_{G_{ry}}
\end{aligned} \tag{4.44}$$

$\dot{F}$ est donné par

$$\begin{aligned}
\dot{F} &= e^N \dot{N} N^{'2} + 2e^N N^{'}\dot{N}^{'} + e^{N-A}\dot{N}^2(\dot{N}-\dot{A}) + 2e^{N-A}\dot{N}\ddot{N}\\
&= e^N N^{'}(2\dot{N}^{'} + \dot{N}N^{'} - \dot{N}A^{'}) + e^N\dot{N}N^{'}A^{'} + e^{N-A}\dot{N}(\dot{N}^2+\dot{N}\dot{A}+2\ddot{N})\\
&= 4e^N N^{'}\underbrace{\left[\frac{\dot{N}}{4}(N^{'}-A^{'})+\frac{\dot{N}^{'}}{2}\right]}_{G_{ry}} + 4e^N\dot{N}\underbrace{\left[\frac{N^{'}A^{'}}{4}+e^{-A}\left(\frac{\ddot{N}}{2}+\frac{\dot{N}^2}{4}-\frac{\dot{N}\dot{A}}{4}\right)\right]}_{G_{yy}}
\end{aligned} \tag{4.45}$$

L'équation différentielle pour la solution de Schwarzschild est trop compliquée pour être résolue de manière analytique, mais à partir des discussions on a vu que le modèle devrait se tenir dans des échelles plus petites, si l'on devait résoudre les équations numériquement, on doit obtenir la même conclusion que le modèle ne s'écarte pas de la solution de Schwarzschild pour le petit r.

4.2.1 Solution de Schwarzschild encore

La tentative précédente a échoué, on doit donc essayer de trouver une solution Schwarzschild à nouveau en proposant une nouvelle forme de la métrique

$$ds^2 = -N^2(r,y)dt^2 + A^2(r,y)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + dy^2 \tag{4.46}$$

Où on a gardé la symétrie sphérique de la solution en θ et ϕ, et utilise des termes carrés pour assurer la positivité des coefficients. On doit calculer à nouveau les symbôles de Christoffel qui sont donnés par

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma^t_{tt} = 0 & \Gamma^r_{tt} = \frac{N\dot{N}}{A^2} & \Gamma^y_{tt} = NN' \\
\Gamma^t_{tr} = \frac{\dot{N}}{N} & \Gamma^r_{tr} = 0 & \Gamma^y_{tr} = 0 \\
\Gamma^t_{ty} = \frac{N'}{N} & \Gamma^r_{ty} = 0 & \Gamma^y_{ty} = 0 \\
\Gamma^t_{rr} = 0 & \Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\gamma^{im}(\gamma_{mk,j} + \gamma_{mj,k} - \gamma_{jk,m}) & \Gamma^y_{rr} = -AA' \\
\Gamma^t_{ry} = 0 & \Gamma^r_{ry} = \frac{A'}{A} & \Gamma^y_{yr} = 0 \\
\Gamma^t_{yy} = 0 & \Gamma^r_{yy} = 0 & \Gamma^y_{yy} = 0
\end{array} \tag{4.47}$$

En déduisant le tenseur de Ricci qui donné par

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= N^2\left(\frac{N''}{N} + \frac{N'A'}{NA} + \frac{\ddot{N}}{NA^2} - \frac{\dot{N}\dot{A}}{NA^3} + \frac{2\dot{N}}{rNA^2}\right) \\
R_{rr} &= -A^2\left(\frac{A''}{A} + \frac{N'A'}{NA} + \frac{\ddot{N}}{NA^2} - \frac{\dot{N}\dot{A}}{NA^3} - \frac{2\dot{A}}{rA^3}\right) \\
R_{\theta\theta} &= 1 - \frac{1}{A^2} - \frac{r}{A^2}\left(\frac{\dot{N}}{N} - \frac{\dot{A}}{A}\right) \\
R_{\phi\phi} &= \sin^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{A^2} - \frac{r\sin^2\theta}{A^2}\left(\frac{\dot{N}}{N} - \frac{\dot{A}}{A}\right) \\
R_{yy} &= -\frac{N''}{N} - \frac{A''}{A} \\
R_{ry} &= \frac{2A'}{rA} + \frac{\dot{N}A'}{NA} - \frac{\dot{N}'}{N}
\end{aligned} \tag{4.48}$$

On contracte les tenseur de Ricci pour obtenir le scalaire de Ricci

$$R = -\frac{2N''}{N} - \frac{2A''}{A} - \frac{2N'A'}{NA} - \frac{2\ddot{N}}{NA^2} + \frac{2\dot{N}\dot{A}}{NA^3} - \frac{4\dot{N}}{rNA^2} + \frac{4\dot{A}}{rA^3} + \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2A^2} \tag{4.49}$$

En utilise l'expression du scalaire de Ricci, on arrive au tenseur d'Einstein

$$\begin{aligned}
G_{tt} &= N^2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^2A^2}-\frac{A''}{A}+\frac{2\dot{A}}{rA^3}\right)\\
G_{rr} &= -A^2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^2A^2}-\frac{N''}{N}-\frac{2\dot{N}}{rNA^2}\right)\\
G_{\theta\theta} &= r^2\left(\frac{N''}{N}+\frac{A''}{A}+\frac{N'A'}{NA}+\frac{\ddot{N}}{NA^2}-\frac{\dot{N}\dot{A}}{NA^3}+\frac{\dot{N}}{rNA^2}-\frac{\dot{A}}{rA^3}\right)\\
G_{\phi\phi} &= r^2\sin^2\theta\left(\frac{N''}{N}+\frac{A''}{A}+\frac{N'A'}{NA}+\frac{\ddot{N}}{NA^2}-\frac{\dot{N}\dot{A}}{NA^3}+\frac{\dot{N}}{rNA^2}-\frac{\dot{A}}{rA^3}\right)\\
G_{yy} &= -\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^2A^2}+\frac{N'A'}{NA}+\frac{\ddot{N}}{NA^2}-\frac{\dot{N}\dot{A}}{NA^3}+\frac{2\dot{N}}{rNA^2}-\frac{2\dot{A}}{rA^3}\\
G_{ry} &= \frac{2A'}{rA}+\frac{\dot{N}A'}{NA}-\frac{\dot{N}'}{N}
\end{aligned}\tag{4.50}$$

D'autre part, le terme de courbure scalaire U est donné par

$$\begin{aligned}
U_{tt} &= -\frac{N^2\delta(y)}{\mu^2}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^2A^2}+\frac{2\dot{A}}{rA^3}\right)\\
U_{rr} &= \frac{A^2\delta(y)}{\mu^2}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^2A^2}-\frac{2\dot{N}}{rNA^2}\right)\\
U_{\theta\theta} &= -\frac{r^2\delta(y)}{\mu^2}\left(\frac{\ddot{N}}{NA^2}-\frac{\dot{N}\dot{A}}{NA^3}+\frac{\dot{N}}{rNA^2}-\frac{\dot{A}}{rA^3}\right)\\
U_{\phi\phi} &= -\frac{r^2\sin^2\theta\delta(y)}{\mu^2}\left(\frac{\ddot{N}}{NA^2}-\frac{\dot{N}\dot{A}}{NA^3}+\frac{\dot{N}}{rNA^2}-\frac{\dot{A}}{rA^3}\right)
\end{aligned}\tag{4.51}$$

L'étape suivante est de trouver la condition de jonction en supposant un saut en A' et $\delta(y)$ en A'', on équivaut les termes impliquant $\delta(y)$ dans les deux côtés de l'équation d'Einstein, on trouve

$$\begin{aligned}
-\frac{2A'}{A} &= -\frac{\kappa^2}{\mu^2}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^2A^2}+\frac{2\dot{A}}{rA^3}\right)\\
-\frac{2N'}{N} &= -\frac{\kappa^2}{\mu^2}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^2A^2}-\frac{2\dot{N}}{rNA^2}\right)\\
\frac{2A'}{A}+\frac{2N'}{N} &= -\frac{\kappa^2}{\mu^2}\left(\frac{\ddot{N}}{NA^2}-\frac{\dot{N}\dot{A}}{NA^3}+\frac{\dot{N}}{rNA^2}-\frac{\dot{A}}{rA^3}\right)
\end{aligned}\tag{4.52}$$

On combine ces équation, on trouve

$$\frac{\ddot{N}}{NA^2}-\frac{\dot{N}\dot{A}}{NA^3}-\frac{\dot{N}}{rNA^2}+\frac{\dot{A}}{rA^3}+\frac{2}{r^2}-\frac{2}{r^2A^2}=0 \tag{4.53}$$

On est donc parvenu à une équation intéressante impliquant seulement les termes de r, mais on a encore besoin d'une deuxième équation pour résoudre les variables N rt A. Pour obtenir une deuxième équation avec seulement des termes liés à r et au lieu d'essayer de trouver une forme d'intégrale, on manipulant directement le tenseur d'Einstein, si on considère: $G_{\theta\theta}/r^2 + G_{tt}/N^2 - G_{rr}/A^2 - G_{yy}$, on trouve

$$-\frac{3\dot{N}}{rNA^2} + \frac{3\dot{A}}{rA^3} + \frac{3}{r^2} - \frac{3}{r^2A^2} = -\frac{\kappa^2\delta(y)}{\mu^2}\left(\frac{\ddot{N}}{NA^2} - \frac{\dot{N}\dot{A}}{NA^3} - \frac{\dot{N}}{rNA^2} + \frac{\dot{A}}{rA^3} + \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2A^2}\right) \tag{4.54}$$

Un côté de l'équation est une distribution delta et l'autre côté a la même équation que celle qui vient de la condition de jonction, ces termes doivent être tous deux être zero, dans ce cas, on trouve

$$-\frac{\dot{N}}{rNA^2} + \frac{\dot{A}}{rA^3} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2A^2} = 0 \tag{4.55}$$

à pris avoir trouvé deux équations de N et A qui impliquant seulement r, il semble opportun de trouver une solution, mais malheureusement la tentative de recherche d'une solution de Schwarzschild à échoué de nouveau.

4.2.2 Dilatation de la constante cosmologique

De nombreux cosmologistes ont étudié et proposé diverses façons de généraliser le modèle de DGP, il existe plusieurs méthodes de généralisation qui sont donc plus prometteuse en donnant un résultat différent du modèle originale DGP.

Ces méthode [20] comprennent la généralisation direct du modèle DGP avec un bulk de dimensions plus élevé et une généralisation étape par étape dans le modèle de gravité [24, 25].

Dans le document de Dvali et Gabadadze travaillent avec Shifman [20] pour proposer un nouveau modèle qui implique non seulement 1 mais plus de 2 dimensions supplémentaires. Dans ce contexte, on suppose qu'on vive en 3D brane qui est intégrée en un bulk de $(4+1)N$ dimensions, avec N étant le nombre de dimension supplémentaire et $N > 2$, dans ce cadre, l'action est donné par

$$S = M_*^{2+N} \int d^4x d^N\rho \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{R} + M_{(4)}^2 \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g}(\epsilon + L_m) \tag{4.56}$$

Où x est la coordonnée à 4 dimensions, ρ la coordonnée pour N dimensions supplémentaires.
Les termes inclinés sont comme avant les quantités en bulk tandis que les autres sont les quantités de la brane, M_* est la masse de Planck à $(4+N)$ dimensions tandis que $M_{(4)}$ est l'équivalent à 4 dimensions, notant que dans ce cadre, on ne suppose qu'un terme source qui est composé de la constante cosmologique de la brane à 4 dimensions ϵ et le lagrangien de la matière à 4 dimensions L_m.

Pour avoir encore plus de dimensions, on doit diluer la constante cosmologique car le modèle ΛCDM avec une constante cosmologique de valeur naturelle $(\sim (Tev)^4)$ ne prédisent pas la petite valeur observée du paramètre Hubble. plus précisément, en acceptant que l'univers actuel soit dominé par la constante cosmologique, H est donnée par l'équation de Friedmann.

$$H^2 \sim \frac{1}{M_{pl}^2} \epsilon \tag{4.57}$$

En remplaïçant dans l'équation la valeur de la masse de planck, cela donne un paramètre Hubble de $H \sim 10^{-3} eV$ qui est largement incompatible avec $H \sim 10^{-33} eV$ observée. la seul façon de faire fonctionner le modèle standard est d'utiliser une grande quantité de réglage fin pour annuler l'effet de la constante cosmologique.
Heureusement dans ce modèle de dilatation de la constante cosmologique, le problème de réglage fin est évité. Le filtre à énergie protège le plus grand effet de grande constante cosmologique et prédit un petit paramètre tel qu'on observe.

$$H \sim 10^{-33} eV \, pour \, N = 4, M_* \sim 10^{-3} eV, \epsilon_4^{'} \sim (TeV)^4$$

$$H \sim 10^{-33} eV \, pour \, N = 6, M_* \sim 10^{-3} eV, \epsilon_4^{'} \sim M_{pl}^4$$

Cela résout le problème de la constante cosmologique. en tant que travail futur pour étudier la cosmologie à dimensions supérieur, il serait intéressant de tenir compte du modèle dilatant la constante cosmologique de l'observation.

Notre objectif principale de présenter le modèle DGP est de décrire l'accélération de l'expansion de l'univers ainsi un solution du notre problème majeur de la constante cosmologique.
Dans la première étape de ce chapitre, on a proposé de modifier la métrique en termes exponentiels puis en termes carrés, amis cela propose des calcules compliqués analytiquement.

D'autre part, les cosmologistes Dvali, Gabadadze et shifman ont été réussi de résoudre ce problème en proposant la méthode de dilater la constante cosmologique.

Conclusion générale

Tout au longue de ce mémoire, on a bien décrit la cosmologie du modèle le plus célèbre des modèles branaires comportant des dimensions supplémentaires et modifiant la gravité à grandes distances. La phénoménologie de ce modèle est très riche, notamment du point de vue cosmologique.

Dans le deuxième chapitre, on a construit notre modèle en basant sur divers concepts. De l'action de Hilbert-Einstein à 5 dimensions on a repris les équations d'Einstein modifiées, qui portent des informations sur les interactions gravitationnelles, ainsi que les équations de Friedmann à 5 dimensions dans le troisième chapitre.
On a vue que la cosmologie habituelle à 4 dimensions est récupérée pour les rayons de Hubble plus petits que l'échelle de croisement entre les deux régimes à 4 et à 5 dimensions et on a obtenue les équations de mouvement de la brane grâce aux conditions de jonction. D'autre part, dans le quatrième chapitre on a vue que le modèle DGP contient deux branches de solutions avec des propriétés différentes. En particulier, la solution de la brane 1 ressemble bien au modèle d'énergie fantôme dont les équations d'état sont très négative (< -1) et sans causer un problème de la conservation de l'énergie. Ces modèles d'énergie fantôme présentent une idée intéressante dans le but de résoudre le problème de la constante cosmologique, ils ne sont pas impossible à réaliser, cela ouvre beaucoup d'intérêt à la communauté cosmologistes. Tandis que, la solution de la brane 2 ressemble à une solution auto-accélérée.

Le modèle DGP a encore certains problèmes non résolus de son propre. Le degrés de liberté supplémentaire pour le propagateur crée un graviton sans masse à 5 dimensions ou un graviton massif à 4 dimensions [2]. Cela peut provoquer des problèmes car il est incompatible avec les observations.

Cela suggère qu'il a encore une possibilité d'améliorer ce modèle en proposant des méthodes de généralisation tel que la méthode de dilatation de constante cosmologique discutée dans le dernier chapitre afin qu'on peut révéler une meilleur solution au problème de la constante cosmologique.

ANNEXE A

Calculs intermédiaires du chapitre 2

A.1 Symbôles de Christoffel dans la brane

Soit la métrique de la brane en coordonnées sphérique avec un temps cosmique

$$dS^2 = -n^2 d\tau^2 + a^2 \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right] \qquad = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{A.1}$$

or

$$dS^2 = -n^2 d\tau^2 + a^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j, \tag{A.2}$$

avec

$$\gamma_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

En utilisant l'expression des symôles de Christoffel donnés par la relation suivante

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda}(g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}) \tag{A.3}$$

On obtient les symbôles de Christoffel:

Symbôle de Christoffel	leur valeur	Symbôle de Christoffel	leur valeur
Γ^0_{00}	$\frac{\dot{n}}{n}$	Γ^i_{0j}	$\frac{\dot{a}}{a}\delta^i_j$
Γ^0_{0i}	0	Γ^0_{ij}	$\frac{a\dot{a}}{n^2}\gamma_{ij}$
Γ^i_{00}	0	Γ^i_{jk}	$\frac{1}{2}\gamma^{im}[\gamma_{km,j} + \gamma_{mj,k} - \gamma_{jk,m}]$

Tableau 1: Symbôles de Christoffel calculés à partir de la métrique (A.2).

En effet:

1.

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{00} &= \frac{1}{2} g^{0\rho} \left(\partial_0 g_{0\rho} + \partial_0 g_{\rho 0} - \partial_\rho g_{00}\right) \\
&= \frac{1}{2} g^{00} \left(\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}\right) = \frac{1}{2} g^{00} \left(\partial_0 g_{00}\right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{n^2}\right) \left(\partial_\tau(-n^2)\right) = \frac{-1}{2n^2} \left(-2n\dot{n}\right) \\
\Gamma^0_{00} &= \frac{\dot{n}}{n}.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

2.

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{0i} &= \frac{1}{2} g^{00} \left(\partial_0 g_{i0} + \partial_i g_{00} - \partial_0 g_{0i}\right) = \frac{1}{2} g^{00} \left(\partial_i g_{00}\right) \\
\Gamma^0_{0i} &= \frac{-1}{2n^2} (\partial_i g_{00}) = 0.
\end{aligned} \tag{A.5}$$

3.

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2} g^{ii} \left(\partial_0 g_{0i} + \partial_0 g_{i0} - \partial_i g_{00}\right) = 0. \tag{A.6}$$

4.

$$\begin{aligned}
\Gamma^i_{0j} &= \frac{1}{2} g^{i\rho} \left(\partial_0 g_{j\rho} + \partial_j g_{\rho 0} - \partial_\rho g_{0j}\right) \\
&= \frac{1}{2} g^{ik} \left(\partial_0 g_{jk} + \partial_j g_{k0} - \partial_k g_{0j}\right) \\
&= \frac{1}{2} g^{ik} \left(\partial_0 g_{jk}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2}\right) \left(\gamma_{ik})^{-1} (2a\dot{a}\gamma_{jk}\right) \\
&= \frac{1}{2} (\frac{1}{a^2}) \gamma^{ik} (2a\dot{a}\gamma_{jk}) \\
\Gamma^i_{0j} &= \frac{\dot{a}}{a} \delta^i_j.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

5.

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{ij} &= \frac{1}{2} g^{0\rho} \left(\partial_i g_{j\rho} + \partial_j g_{\rho i} - \partial_\rho g_{ij}\right) \\
&= \frac{1}{2} g^{00} \left(\partial_i g_{j0} + \partial_j g_{0i} - \partial_0 g_{ij}\right) \\
&= \frac{1}{2} g^{00} \left(-\partial_0 g_{ij}\right) = \frac{-1}{2n^2} \left(-\partial_0 (a^2 \gamma_{ij})\right) = \frac{2a\dot{a}}{2n^2} \gamma_{ij} \\
\Gamma^0_{ij} &= \frac{a\dot{a}}{n^2} \gamma_{ij}.
\end{aligned} \tag{A.8}$$

6.

$$\begin{aligned}
\Gamma^i_{jk} &= \frac{1}{2} g^{i\rho} \left(\partial_j g_{k\rho} + \partial_k g_{\rho j} - \partial_\rho g_{jk} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{im} \left(\partial_j g_{km} + \partial_k g_{mj} - \partial_m g_{jk} \right) \\
&= \frac{1}{2a^2} (\gamma_{im})^{-1} \left(\partial_j (a^2 \gamma_{km}) + \partial_k (a^2 \gamma_{mj}) - \partial_m (a^2 \gamma_{jk}) \right) \\
\Gamma^i_{jk} &= \frac{1}{2} \gamma^{im} \left(\gamma_{km,j} + \gamma_{mj,k} - \gamma_{jk,m} \right). \qquad \text{(A.9)}
\end{aligned}$$

Utilisant maintenant la métrique en coordonnées sphériques (A.3):

Symbôle de Christoffel	Leur valeur
Γ^1_{11}	$\frac{kr}{(1-kr^2)}$
Γ^1_{22}	$-r(1-kr^2)$
Γ^1_{33}	$-r\sin^2\theta(1-kr^2)$
Γ^2_{12}	$\frac{1}{r}$
Γ^2_{33}	$-\cos\theta\sin\theta$
Γ^3_{13}	$\frac{1}{r}$
Γ^3_{23}	$\cot\theta$

Tableau 2: symbôles de Christoffel calculés à partir de la métrique (A.3).

En effet:

1.

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2} g^{1\rho} \left(\partial_1 g_{1\rho} + \partial_1 g_{\rho 1} - \partial_\rho g_{11} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{11} \left(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11} \right) = \frac{1}{2} g^{11} \left(\partial_1 g_{11} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1-kr^2}{a^2} \right) \left(\partial_r (\frac{a^2}{1-kr^2}) \right) = \left(\frac{1-kr^2}{2a^2} \right) \left(\frac{2ka^2 r}{(1-kr^2)^2} \right) \\
\Gamma^1_{11} &= \frac{kr}{(1-kr^2)} \qquad \text{(A.10)}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2} g^{1\rho} \left(\partial_2 g_{2\rho} + \partial_2 g_{\rho 2} - \partial_\rho g_{22} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{11} \left(\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22} \right) = \frac{-1}{2} g^{11} \left(\partial_1 g_{22} \right) \\
&= \frac{-1}{2} \left(\frac{1-kr^2}{a^2} \right) \left(\partial_r (a^2 r^2) \right) = \frac{-1}{2} \left(\frac{1-kr^2}{a^2} \right) \left(2a^2 r \right) \\
\Gamma^1_{22} &= -r \left(1-kr^2 \right) \qquad \text{(A.11)}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{33} &= \frac{1}{2} g^{1\rho} \left(\partial_3 g_{3\rho} + \partial_3 g_{\rho 3} - \partial_\rho g_{33}\right) \\
&= \frac{1}{2} g^{11} \left(\partial_3 g_{31} + \partial_3 g_{13} - \partial_1 g_{33}\right) = \frac{-1}{2} g^{11} \left(\partial_1 g_{33}\right) \\
&= \frac{-1}{2} \left(\frac{1-kr^2}{a^2}\right) \left(\partial_r (a^2 r^2 \sin^2\theta)\right) = \frac{-1}{2} \left(\frac{1-kr^2}{a^2}\right) \left(2a^2 r \sin^2\theta\right) \\
\Gamma^1_{33} &= -r \sin^2\theta \left(1 - kr^2\right)
\end{aligned} \tag{A.12}$$

4.

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2} g^{2\rho} \left(\partial g_{2\rho} + \partial_2 g_{\rho 1} - \partial_\rho g_{12}\right) \\
&= \frac{1}{2} g^{22} \left(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{21} - \partial_2 g_{12}\right) = \frac{1}{2} g^{22} \left(\partial_1 g_{22}\right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 r^2}\right) \left(\partial_r (a^2 r^2)\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 r^2}\right) \left(2a^2 r\right) \\
\Gamma^2_{12} &= \frac{1}{r}
\end{aligned} \tag{A.13}$$

5.

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{33} &= \frac{1}{2} g^{2\rho} \left(\partial_3 g_{3\rho} + \partial_3 g_{\rho 3} - \partial_\rho g_{33}\right) \\
&= \frac{1}{2} g^{22} \left(\partial_3 g_{32} + \partial_3 g_{23} - \partial_2 g_{33}\right) = \frac{-1}{2} g^{22} \left(\partial_2 g_{33}\right) \\
&= \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{r^2 a^2}\right) \left(\partial_\theta (a^2 r^2 \sin^2\theta)\right) = \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{r^2 a^2}\right) \left(a^2 r^2 (2\cos\theta \sin\theta)\right) \\
\Gamma^2_{33} &= -\cos\theta \sin\theta
\end{aligned} \tag{A.14}$$

6.

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{13} &= \frac{1}{2} g^{3\rho} \left(\partial_1 g_{3\rho} + \partial_3 g_{\rho 1} - \partial_\rho g_{13}\right) \\
&= \frac{1}{2} g^{33} \left(\partial_1 g_{33} + \partial_3 g_{31} - \partial_3 g_{13}\right) = \frac{1}{2} g^{33} \left(\partial_1 g_{33}\right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 r^2 \sin^2\theta}\right) \left(\partial_r (a^2 r^2 \sin^2\theta)\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 r^2 \sin^2\theta}\right) \left(2a^2 r \sin^2\theta\right) \\
\Gamma^3_{13} &= \frac{1}{r}
\end{aligned} \tag{A.15}$$

7.

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{23} &= \frac{1}{2} g^{3\rho} \left(\partial_2 g_{3\rho} + \partial_3 g_{\rho 2} - \partial_\rho g_{23}\right) \\
&= \frac{1}{2} g^{33} \left(\partial_2 g_{33} + \partial_3 g_{32} - \partial_3 g_{23}\right) = \frac{1}{2} g^{33} \left(\partial_2 g_{33}\right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 r^2 \sin^2\theta}\right) \left(\partial_\theta (a^2 r^2 \sin^2\theta)\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 r^2 \sin^2\theta}\right) \left(2a^2 r^2 \sin\theta \cos\theta\right) \\
\Gamma^3_{23} &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta
\end{aligned} \tag{A.16}$$

A.2 Tenseur de Ricci dans la brane

Le tenseur de Ricci est donné par

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda,\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} \tag{A.17}$$

De cette relation et la relation des symbôles de Christoffel (A.3), on aura

Dérivé de Symbôle de Christoffel	leur valeur
$\Gamma^{0}_{00,0}$	$\frac{\ddot{n}}{n} - \frac{\dot{n}^2}{n^2}$
$\Gamma^{1}_{01,0}$	$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}$
$\Gamma^{2}_{02,0}$	$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}$
$\Gamma^{3}_{03,0}$	$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}$
$\Gamma^{0}_{ij,0}$	$\frac{\dot{a}^2+\ddot{a}a}{n^2} - 2\frac{a\dot{a}\dot{n}}{n^3}\gamma_{ij}$

Tableau 3: Dérivés des Symbôles de Christoffel.

En effet

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \Gamma^{\lambda}_{00,\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{0\lambda,0} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda}\Gamma^{\alpha}_{00} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha 0}\Gamma^{\alpha}_{\lambda 0} \\
&= \Gamma^{0}_{00,0} - \Gamma^{0}_{00,0} - \Gamma^{1}_{01,0} - \Gamma^{2}_{02,0} - \Gamma^{3}_{03,0} + \Gamma^{0}_{00}\Gamma^{0}_{00} + \Gamma^{1}_{01}\Gamma^{0}_{00} + \Gamma^{2}_{02}\Gamma^{0}_{00} + \Gamma^{3}_{03}\Gamma^{0}_{00} \\
&- \Gamma^{0}_{00}\Gamma^{0}_{00} - \Gamma^{1}_{10}\Gamma^{1}_{10} - \Gamma^{2}_{20}\Gamma^{2}_{20} - \Gamma^{3}_{30}\Gamma^{3}_{30} \\
&= -3\partial_0\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) + 3\left(\frac{\dot{a}\dot{n}}{an}\right) - 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -3\left(\frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2}\right) + 3\left(\frac{\dot{a}\dot{n}}{an}\right) - 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \\
&= 3\left(-\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{a}\dot{n}}{an} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) \\
R_{00} &= -3\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}\dot{n}}{an}\right) && \text{(A.18)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{ij} &= \Gamma^{\lambda}_{ij,\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{i\lambda,j} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda}\Gamma^{\alpha}_{ij} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha i}\Gamma^{\alpha}_{\lambda j} && \text{(A.19)} \\
&= \Gamma^{0}_{ij,0} + \Gamma^{0}_{00}\Gamma^{0}_{ij} + \Gamma^{1}_{01}\Gamma^{0}_{ij} + \Gamma^{2}_{02}\Gamma^{0}_{ij} + \Gamma^{3}_{03}\Gamma^{0}_{ij} - \Gamma^{0}_{ki}\Gamma^{k}_{0j} - \Gamma^{k}_{0i}\Gamma^{0}_{kj} \\
&= \partial_0\left(\frac{a\dot{a}}{n^2})\gamma_{ij} + (\frac{\dot{n}}{n}\right)\left(\frac{a\dot{a}}{n^2}\right)\gamma_{ij} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\left(\frac{a\dot{a}}{n^2}\right)\gamma_{ij} - 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\left(\frac{a\dot{a}}{n^2}\right)\gamma_{ij} \\
&= \partial_0\left(\frac{a\dot{a}}{n^2}\right)\gamma_{ij} + \left(\frac{a\dot{a}\dot{n}}{n^3}\right)\gamma_{ij} + \left(\frac{\dot{a}}{n}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\dot{a}^2 + \ddot{a}a}{n^2} - 2\frac{a\dot{a}n\dot{n}}{n^4}\right)\gamma_{ij} + \frac{a\dot{a}\dot{n}^3}{\gamma}{}_{ij} + \left(\frac{\dot{a}}{n}\right)^2\gamma_{ij} \\
&= \left(2(\frac{\dot{a}}{a})^2 + \frac{a\ddot{a}}{n^2} - \frac{a\dot{a}\dot{n}}{n^3}\right)\gamma_{ij} && \text{(A.20)}
\end{aligned}$$

On a cette formule: $g_{ij} = a^2(t)\gamma_{ij}$, avec

$$\gamma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 \quad si \quad i \neq j \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{ij} = \begin{pmatrix} \gamma_{rr} = (1-kr^2)^{-1} & \\ \gamma_{\theta\theta} = r^2 & , k = -1, 0, 1. \\ \gamma_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta & \end{pmatrix}$$

On peut écrire

$$R_{ij} = \tilde{R_{ij}} + \left(2(\frac{\dot{a}}{a})^2 + \frac{a\ddot{a}}{n^2} - \frac{a\dot{a}\dot{n}}{n^3}\right)\gamma_{ij} \tag{A.21}$$

avec $\tilde{R_{ij}}$ est le tenseur de Ricci spatial calculé à partir de la métrique γ_{ij} est qui est égale à

$$\tilde{R_{ij}} = \partial x^j \tilde{\Gamma^k_{ki}} - \partial x^k \tilde{\Gamma^k_{ij}} + \tilde{\Gamma^k_{li}} \tilde{\Gamma^l_{kj}} - \tilde{\Gamma^k_{ij}} \tilde{\Gamma^l_{kl}} \tag{A.22}$$

on aura

$$R_{ij} = (\frac{a\ddot{a}}{n^2} + 2\frac{\dot{a}^2}{n^2} - \frac{a\dot{a}\dot{n}}{n^3} + 2k)\gamma_{ij} \tag{A.23}$$

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}\dot{n}}{an}\right) \\ R_{ij} &= (\frac{a\ddot{a}}{n^2} + 2\frac{\dot{a}^2}{n^2} - \frac{a\dot{a}\dot{n}}{n^3} + 2k)\gamma_{ij} \end{aligned} \tag{A.24}$$

A.3 Scalaire de Ricci dans la brane

Par contraction du tenseur de Ricci,$R_{\mu\nu}$, avec la métrique ,$g_{\mu\nu}$, on aura le scalaire de Ricci R, avec $g_{ij} = a^2\gamma_{ij}$.

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\ &= g^{00} R_{00} + g^{ij} R_{ij} \end{aligned} \tag{A.25}$$

$$\begin{aligned} R &= \frac{3}{n^2}\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{3}{n^2}\frac{\dot{a}\dot{n}}{an} + 3(\frac{a\ddot{a}}{a^2n^2} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2n^2} - \frac{\dot{a}\dot{n}}{an^3} + \frac{2k}{a^2}) \\ &= \frac{3\ddot{a}}{an^2} - \frac{3\dot{a}\dot{n}}{an^3} + 3\frac{a\ddot{a}}{a^2n^2} + 6\frac{\dot{a}^2}{a^2n^2} - 3\frac{\dot{a}\dot{n}}{an^3} + 6\frac{k}{a^2} \\ R &= 6(\frac{\ddot{a}}{an^2} - \frac{\dot{a}\dot{n}}{an^3} + \frac{\dot{a}^2}{a^2n^2} + \frac{k}{a^2}) \end{aligned} \tag{A.26}$$

Récapitulation du tenseur de Ricci et de courbure scalaire:

Tenseur de Ricci	leur valeur
R_{00}	$-3(\frac{\ddot{a}}{a}+\frac{\dot{a}\dot{n}}{an})$
R_{ij}	$(\frac{a\ddot{a}}{n^2}+2\frac{\dot{a}^2}{n^2}-\frac{a\dot{a}\dot{n}}{n^3}+2k)\gamma_{ij}$
R_{11}	$(\frac{a\ddot{a}}{n^2}+2\frac{\dot{a}^2}{n^2}-\frac{a\dot{a}\dot{n}}{n^3}+2k)(\frac{1}{1-kr^2})$
R_{22}	$(\frac{a\ddot{a}}{n^2}+2\frac{\dot{a}^2}{n^2}-\frac{a\dot{a}\dot{n}}{n^3}+2k)(r^2)$
R_{33}	$(\frac{a\ddot{a}}{n^2}+2\frac{\dot{a}^2}{n^2}-\frac{a\dot{a}\dot{n}}{n^3}+2k)(r^2\sin^2\theta)$
R	$6(\frac{\ddot{a}}{an^2}-\frac{\dot{a}\dot{n}}{an^3}+\frac{\dot{a}^2}{a^2n^2}+\frac{k}{a^2})$

Tableau 4: Valeurs des tenseurs de Ricci, $R_{\mu\nu}$, et de la courbure scalaire R dans la brane.

Les éléments non nuls du terme, $\tilde{U}_{\mu\nu}$, sont:

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{00} &= \frac{-3\delta(y)}{\mu^2 b}\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2}+\frac{kn^2}{a^2}\right)\\ \tilde{U}_{ij} &= \frac{-\delta(y)}{\mu^2 b}\left[\frac{a^2}{n^2}\left(-\frac{\dot{a}^2}{a^2}+2\frac{\dot{a}\dot{n}}{an}-2\frac{\ddot{a}}{a}\right)-k\right]\gamma_{ij}\end{aligned} \tag{A.27}$$

En effet:

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{00} &= \frac{-\delta(y)}{\mu^2 b}\left(R_{00}-\frac{1}{2}Rg_{00}\right)\\ &= \frac{-\delta(y)}{\mu^2 b}\left(-3(\frac{\ddot{a}}{a}-\frac{\dot{a}\dot{n}}{an})\right)-3\left(\frac{\ddot{a}}{an^2}+\frac{\dot{a}^2}{a^2n^2}-\frac{\dot{a}\dot{n}}{an^3}+\frac{k}{a^2}\right)(-n^2)\\ &= \frac{-3\delta(y)}{\mu^2 b}\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2}+\frac{kn^2}{a^2}\right)\end{aligned} \tag{A.28}$$

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{ij} &= \frac{-\delta(y)}{\mu^2 b}\left(R_{ij}-\frac{1}{2}Rg_{ij}\right)\\ &= \frac{-\delta(y)}{\mu^2 b}\left(\frac{a\ddot{a}}{n^2}+2\frac{\dot{a}^2}{n^2}-\frac{a\dot{a}\dot{n}}{n^3}+2k\right)\gamma_{ij}-3\left(\frac{\ddot{a}}{an^2}+\frac{\dot{a}^2}{a^2n^2}-\frac{\dot{a}\dot{n}}{an^3}+\frac{k}{a^2}\right)a^2\gamma_{ij}\\ &= \frac{-\delta(y)}{\mu^2 b}\left(-2\frac{a\ddot{a}}{n^2}-\frac{\dot{a}^2}{n^2}+2\frac{a\dot{a}\dot{n}}{n^3}-k\right)\gamma_{ij}\\ &= \frac{-\delta(y)}{\mu^2 b}\left[\frac{a^2}{n^2}\left(-\frac{\dot{a}^2}{a^2}+2\frac{\dot{a}\dot{n}}{an}-2\frac{\ddot{a}}{a}\right)-k\right]\gamma_{ij}\end{aligned} \tag{A.29}$$

A.4 Symbôles de Christoffel dans le bulk

En plus de ceux calculés dans la brane, on aura d'autres symbôles dans le bulk. En utilisant cette relation

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}\left(g_{\lambda\mu,\nu}+g_{\lambda\nu,\mu}-g_{\mu\nu,\lambda}\right). \tag{A.30}$$

Symbôle de Christoffel du bulk	leur valeur
Γ^0_{04}	$\frac{n^{'}}{n}$
Γ^i_{04}	0
Γ^0_{i4}	0
Γ^i_{j4}	$\frac{a^{'}}{a}\delta^i_j$
Γ^0_{44}	$\frac{\dot{b}b}{n^2}$
Γ^i_{44}	0
Γ^4_{00}	$\frac{nn^{'}}{b^2}$
Γ^4_{04}	$\frac{\dot{b}}{b}$
Γ^4_{ij}	$\frac{-aa^{'}}{b^2}\gamma_{ij}$
Γ^4_{i4}	0
Γ^4_{44}	$\frac{b^{'}}{b}$

Tableau 5: Symbôles de Christoffel dans le bulk.

En effet

1.

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{04} &= \frac{1}{2}g^{0\rho}(\partial_0 g_{\rho 4} + \partial_4 g_{\rho 0} - \partial_\rho g_{04}) \\
&= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_0 g_{04} + \partial_4 g_{00} - \partial_0 g_{04}) = \frac{1}{2}(\partial_4 g_{00}) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{n^2}\right)\partial_4\left(-n^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}\right)\left(2n^{'}n\right) \\
\Gamma^0_{04} &= \frac{n^{'}}{n}.
\end{aligned} \tag{A.31}$$

2.

$$\begin{aligned}
\Gamma^i_{04} &= \frac{1}{2}g^{i\rho}\left(\partial_0 g_{\rho 4} + \partial_4 g_{\rho 0} - \partial_\rho g_{04}\right) \\
\Gamma^i_{04} &= \frac{1}{2}g^{ik}\left(\partial_0 g_{k4} + \partial_4 g_{k0} - \partial_k g_{04}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{A.32}$$

3.

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{i4} &= \frac{1}{2}g^{0\rho}\left(\partial_i g_{\rho 4} + \partial_4 g_{\rho i} - \partial_\rho g_{i4}\right) \\
\Gamma^0_{i4} &= \frac{1}{2}g^{00}\left(\partial_i g_{04} + \partial_4 g_{0i} - \partial_0 g_{i4}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{A.33}$$

4.

$$\begin{aligned}
\Gamma^i_{j4} &= \frac{1}{2}g^{ik}\left(\partial_j g_{k4} + \partial_4 g_{kj} - \partial_k g_{j4}\right) = \frac{1}{2}g^{ik}\left(\partial_4 g_{kj}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}\right)\gamma^{ik}\left(\partial_4 a^2\gamma_{ij}\right) = \frac{1}{2a^2}\gamma^{ik}\left(2aa^{'}\gamma_{ij}\right) \\
\Gamma^i_{j4} &= \frac{a^{'}}{a}\delta^i_j.
\end{aligned} \tag{A.34}$$

5.

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{44} &= \frac{1}{2}g^{0\rho}\left(\partial_4 g_{4\rho} + \partial_4 g_{\rho 4} - \partial_\rho g_{44}\right) \\
&= \frac{1}{2}g^{00}\left(\partial_4 g_{40} + \partial_4 g_{04} - \partial_0 g_{44}\right) = \frac{1}{2}g^{00}\left(-\partial_0 g_{44}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}\right)\left(\partial_0 b^2\right) = \frac{1}{2n^2}\left(2\dot{b}b\right) \\
\Gamma^0_{44} &= \frac{\dot{b}b}{n^2}.
\end{aligned} \tag{A.35}$$

6.

$$\Gamma^i_{44} = \frac{1}{2}g^{ik}\left(\partial_5 g_{5k} + \partial_5 g_{k5} - \partial_k g_{55}\right) = 0. \tag{A.36}$$

7.

$$\begin{aligned}
\Gamma^4_{00} &= \frac{1}{2}g^{44}\left(\partial_0 g_{04} + \partial_0 g_{40} - \partial_4 g_{00}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b^2}\right)\left(-\partial_4(-n^2)\right) \\
\Gamma^4_{00} &= \frac{nn^{'}}{b^2}.
\end{aligned} \tag{A.37}$$

8.

$$\Gamma^4_{0i} = \frac{1}{2}g^{44}\left(\partial_0 g_{i4} + \partial_i g_{40} - \partial_4 g_{0i}\right) = 0. \tag{A.38}$$

9.

$$\begin{aligned}
\Gamma^4_{04} &= \frac{1}{2}g^{44}(\partial_0 g_{44} + \partial_4 g_{40} - \partial_4 g_{04}) = \frac{1}{2}g^{44}(\partial_0 g_{44}) \\
&= \frac{1}{2}(\frac{1}{b^2})(\partial_0 b^2) = \frac{1}{2b^2}(2b\dot{b}) \\
\Gamma^4_{04} &= \frac{\dot{b}}{b}.
\end{aligned} \tag{A.39}$$

10.

$$\Gamma^4_{ij} = \frac{1}{2}g^{44}(\partial_i g_{j4} + \partial_j g_{4i} - \partial_4 g_{ij}) = \frac{1}{2}g^{44}\left(-\partial_4 g_{ij}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b^2}\right)\left(-\partial_4 a^2 \gamma_{ij}\right) = \frac{1}{2b^2}\left(-aa^{'}\gamma_{ij}\right)$$
$$\Gamma^4_{ij} = \frac{-aa^{'}}{b^2}\gamma_{ij}. \quad (A.40)$$

11.

$$\Gamma^4_{i4} = \frac{1}{2}g^{44}\left(\partial_i g_{44} + \partial_4 g_{4i} - \partial_4 g_{i4}\right) = 0. \quad (A.41)$$

12.

$$\Gamma^4_{44} = \frac{1}{2}g^{44}(\partial_4 g_{44} + \partial_4 g_{44} - \partial_4 g_{44}) = \frac{1}{2}g^{44}(\partial_4 g_{44})$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b^2}\right)\left(\partial_5(b^2)\right) = \frac{1}{2b^2}\left(2bb^{'}\right)$$
$$\Gamma^4_{44} = \frac{b^{'}}{b}. \quad (A.42)$$

A.5 Tenseur de Ricci dans le bulk

En utilisant les symbôles de Christoffel et la relation (A.17), pour calculer le tenseur de Ricci dans le bulk. En tenant compte des résultats donnés dans le tableau suivant:

Dérivé de Symbôle de Christoffel du bulk	leur valeur
$\Gamma^0_{40,4}$	$\frac{\ddot{b}}{b} - \frac{\dot{b}^2}{b^2}$
$\Gamma^0_{44,0}$	$\frac{\ddot{b}b+\dot{b}^2}{n^2} - 2\frac{b\dot{b}\dot{n}}{n^3}$
$\Gamma^1_{41,4}$	$\frac{a^{''}}{a} - \frac{a^{'2}}{a^2}$
$\Gamma^2_{42,4}$	$\frac{a^{''}}{a} - \frac{a^{'2}}{a^2}$
$\Gamma^3_{43,4}$	$\frac{a^{''}}{a} - \frac{a^{'2}}{a^2}$
$\Gamma^4_{00,4}$	$\frac{n^{''}n+n^{'2}}{b^2} - 2\frac{nn^{'}b^{'}}{b^3}$
$\Gamma^4_{44,4}$	$\frac{b^{''}}{b} - \frac{b^{'2}}{b^2}$
$\Gamma^4_{04,0}$	$\frac{\ddot{b}}{b} - \frac{\dot{b}^2}{b^2}$

Tableau 6: Dérivés des symbôles de Christoffel dans le bulk.

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}_{00} &= \frac{nn^{''}}{b^2} - \frac{nn^{'}b^{'}}{b^3} - 3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{b}}{b} + 3\frac{\dot{a}\dot{n}}{an} + \frac{\dot{b}\dot{n}}{bn} + 3\frac{nn^{'}a^{'}}{ab^2} \\
\tilde{R}_{ij} &= \left(\frac{a\ddot{a}}{n^2} + 2(\frac{\dot{a}}{n})^2 - \frac{a\dot{a}\dot{n}}{n^3} - \frac{aa^{''}}{b^2} - 2(\frac{a^{'}}{b})^2 + \frac{aa^{'}b^{'}}{b^3} - \frac{aa^{'}n^{'}}{nb^2} + \frac{a\dot{a}\dot{b}}{bn^2} + 2k\right)\gamma_{ij} \\
\tilde{R}_{44} &= \frac{b\ddot{b}}{n^2} - \frac{b\dot{b}\dot{n}}{n^3} - \frac{n^{''}}{n} - 3\frac{a^{''}}{a} + 3\frac{b\dot{a}\dot{b}}{an^2} + \frac{b^{'}n^{'}}{bn} + 3\frac{a^{'}b^{'}}{ab} \\
\tilde{R}_{04} &= -3\left(\frac{\dot{a}^{'}}{a} - \frac{\dot{a}n'}{an} - \frac{a^{'}\dot{b}}{ab}\right) \\
\tilde{R} &= 2\left(-\frac{n^{''}}{b^2 n} + \frac{n^{'}b^{'}}{nb^3} + \frac{\ddot{b}}{bn^2} - \frac{\dot{b}\dot{n}}{bn^3}\right) \\
&\quad + 6\left(\frac{\ddot{a}}{an^2} - \frac{\dot{a}\dot{n}}{an^3} - \frac{a^{''}}{ab^2} + \frac{a^{'}b^{'}}{ab^3} - \frac{a^{'}n^{'}}{anb^2} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{abn^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2n^2} - \frac{a^{'2}}{a^2b^2} + \frac{k}{a^2}\right) \qquad \text{(A.43)}
\end{aligned}
$$

En effet

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}_{00} &= \Gamma^0_{00,0} + \Gamma^4_{00,4} - \Gamma^0_{00,0} - \Gamma^1_{01,0} - \Gamma^2_{02,0} - \Gamma^3_{03,0} - \Gamma^4_{04,0} \\
&+ \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{00} + \Gamma^1_{01}\Gamma^0_{00} + \Gamma^2_{02}\Gamma^0_{00} + \Gamma^3_{03}\Gamma^0_{00} + \Gamma^4_{04}\Gamma^0_{00} \\
&+ \Gamma^1_{41}\Gamma^4_{00} + \Gamma^2_{42}\Gamma^5_{00} + \Gamma^3_{43}\Gamma^4_{00} + \Gamma^4_{44}\Gamma^4_{00} - \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{00} \\
&- \Gamma^4_{00}\Gamma^0_{40} - \Gamma^4_{40}\Gamma^4_{40} - \Gamma^1_{10}\Gamma^1_{10} - \Gamma^2_{20}\Gamma^2_{20} - \Gamma^3_{30}\Gamma^3_{30} \qquad \text{(A.44)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}_{00} &= \partial_4(\frac{nn^{'}}{b^2}) - 3\partial_0(\frac{\dot{a}}{a}) - \partial_0(\frac{\dot{b}}{b}) + 3(\frac{\dot{a}\dot{n}}{an}) + \frac{\dot{b}\dot{n}}{bn} + 3(\frac{a^{'}}{a})(\frac{nn^{'}}{b^2}) \\
&+ (\frac{b^{'}}{b})(\frac{nn^{'}}{b^2}) - (\frac{nn^{'}}{b^2})(\frac{n^{'}}{n}) - (\frac{\dot{b}}{b})^2 - 3(\frac{\dot{a}}{a})^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}_{00} &= \left(\frac{(n^{'2} + nn^{''})b^2 - 2bb^{'}(nn^{'})}{b^4}\right) - 3(\frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2}) - (\frac{\ddot{b}b - \dot{b}^2}{b^2}) \\
&+ 3(\frac{\dot{a}\dot{n}}{an}) + \frac{\dot{b}\dot{n}}{bn} + 3(\frac{nn^{'}a^{'}}{ab^2}) + \frac{nn^{'}b^{'}}{b^3} - \frac{n^{'2}}{b^2} - (\frac{\dot{b}}{b})^2 - 3(\frac{\dot{a}}{a})^2
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\tilde{R}_{00} = \frac{nn^{''}}{b^2} - \frac{nn^{'}b^{'}}{b^3} - 3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{b}}{b} + 3\frac{\dot{a}\dot{n}}{an} + \frac{\dot{b}\dot{n}}{bn} + 3\frac{nn^{'}a^{'}}{ab^2} \qquad \text{(A.45)}
$$

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{44} &= \Gamma^0_{44,0} + \Gamma^4_{44,4} - \Gamma^1_{41,5} - \Gamma^2_{42,5} - \Gamma^3_{43,5} - \Gamma^4_{44,4} - \Gamma^0_{40,4} \\ &+ \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{44} + \Gamma^0_{40}\Gamma^4_{44} + \Gamma^1_{01}\Gamma^0_{44} + \Gamma^2_{02}\Gamma^0_{44} + \Gamma^3_{03}\Gamma^0_{44} \\ &+ \Gamma^1_{41}\Gamma^4_{44} + \Gamma^2_{42}\Gamma^4_{44} + \Gamma^3_{43}\Gamma^4_{44} + \Gamma^4_{44}\Gamma^4_{44} - \Gamma^0_{04}\Gamma^0_{04} \\ &- \Gamma^1_{14}\Gamma^1_{14} - \Gamma^2_{24}\Gamma^2_{24} - \Gamma^3_{34}\Gamma^3_{34} - \Gamma^4_{44}\Gamma^4_{44} \end{aligned} \tag{A.46}$$

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{44} = \partial_0\left(\frac{b\dot{b}}{n^2}\right) - \partial_4\left(\frac{n^{'}}{n}\right) - 3\partial_4\left(\frac{a^{'}}{a}\right) + \left(\frac{\dot{n}}{n}\right)\left(\frac{b\dot{b}}{n^2}\right) \\ + \left(\frac{n^{'}}{n}\right)\left(\frac{b^{'}}{b}\right) + 3\left(\frac{a^{'}}{a}\right)\left(\frac{b^{'}}{b}\right) - \left(\frac{n^{'}}{n}\right)^2 - 3\left(\frac{a^{'}}{a}\right)^2 + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\left(\frac{b\dot{b}}{n^2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{44} = \left(\frac{\dot{b}^2}{n^2} + \frac{b\ddot{b}}{n^2} - 2\frac{b\dot{b}\dot{n}}{n^3}\right) - \frac{nn^{''}}{n^2} + \frac{n^{'2}}{n^2} - 3\frac{a^{''}}{a} + 3\frac{a^{'2}}{a^2} \\ + \frac{b\dot{b}\dot{n}}{n^3} + 3\frac{a^{'}b^{'}}{ab} - \frac{n^{'2}}{n^2} - 3\frac{a^{'2}}{a^2} + 3\frac{\dot{a}\dot{b}b}{an^2} + \frac{n^{'}b^{'}}{nb}\end{aligned}$$

$$\tilde{R}_{44} = \frac{b\ddot{b}}{n^2} - \frac{b\dot{b}\dot{n}}{n^3} - \frac{n^{''}}{n} - 3\frac{a^{''}}{a} + 3\frac{b\dot{a}\dot{b}}{an^2} + \frac{b^{'}n^{'}}{bn} + 3\frac{a^{'}b^{'}}{ab} \tag{A.47}$$

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{04} &= \Gamma^0_{04,0} - \Gamma^0_{00,0} - \Gamma^1_{01,4} - \Gamma^2_{02,4} - \Gamma^3_{03,4} + \Gamma^0_{40}\Gamma^4_{04} + \Gamma^1_{01}\Gamma^0_{04} + \Gamma^2_{02}\Gamma^0_{04} + \Gamma^3_{03}\Gamma^0_{04} \\ &+ \Gamma^1_{41}\Gamma^4_{04} + \Gamma^2_{42}\Gamma^4_{04} + \Gamma^3_{43}\Gamma^4_{04} - \Gamma^0_{40}\Gamma^4_{04} - \Gamma^1_{10}\Gamma^1_{14} - \Gamma^2_{20}\Gamma^2_{24} - \Gamma^3_{30}\Gamma^3_{34} \\ &= -3\partial_5(\frac{\dot{a}}{a}) + 3(\frac{\dot{a}}{a})(\frac{n^{'}}{n}) + 3(\frac{a^{'}}{a})(\frac{\dot{b}}{b}) - 3(\frac{\dot{a}}{a})(\frac{a^{'}}{a}) \\ &= -3(\frac{\dot{a}^{'}a}{a^2} - \frac{a^{'}\dot{a}}{a^2}) + 3(\frac{\dot{a}\dot{n}}{an}) + 3(\frac{a^{'}\dot{b}}{ab}) - 3\frac{\dot{a}a^{'}}{a^2}\end{aligned} \tag{A.48}$$

donc

$$\tilde{R}_{04} = -3\left(\frac{\dot{a}^{'}}{a} - \frac{\dot{a}n'}{an} - \frac{a^{'}\dot{b}}{ab}\right) \tag{A.49}$$

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{ij} &= \Gamma^0_{ij,0} + \Gamma^4_{ij,4} + \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{ij} + \Gamma^1_{01}\Gamma^0_{ij} + \Gamma^2_{02}\Gamma^0_{ij} \\ &+ \Gamma^3_{03}\Gamma^0_{ij} + \Gamma^0_{40}\Gamma^4_{ij} + \Gamma^4_{04}\Gamma^0_{ij} + \Gamma^4_{44}\Gamma^4_{ij} \\ &+ \Gamma^1_{41}\Gamma^4_{ij} + \Gamma^4_{42}\Gamma^4_{ij} + \Gamma^3_{43}\Gamma^4_{ij} - \Gamma^0_{ji}\Gamma^j_{0j} \\ &- \Gamma^i_{0i}\Gamma^0_{ij} - \Gamma^4_{ji}\Gamma^j_{0j} - \Gamma^i_{4i}\Gamma^4_{ij}\end{aligned} \tag{A.50}$$

$$\tilde{R}_{ij}=\left(\frac{a\ddot{a}}{n^2}+2(\frac{\dot{a}}{n})^2-\frac{a\dot{a}\dot{n}}{n^3}+2k\right)\gamma_{ij}+\partial_5(\frac{-aa^{'}}{b^2})\gamma_{ij}+(\frac{n^{'}}{n})(\frac{-aa^{'}}{b^2}\gamma_{ij})$$
$$+(\frac{\dot{b}}{b})(\frac{a\dot{a}}{n^2}\gamma_{ij})+(\frac{b^{'}}{b})(\frac{-aa^{'}}{b^2}\gamma_{ij})+3(\frac{a^{'}}{a})(\frac{-aa^{'}}{b^2}\gamma_{ij})-2(\frac{-aa^{'}}{b^2}\gamma_{ij})(\frac{a^{'}}{a})$$

$$\tilde{R}_{ij}=\left(\frac{a\ddot{a}}{n^2}+2(\frac{\dot{a}}{n})^2-\frac{a\dot{a}\dot{n}}{n^3}+2k\right)\gamma_{ij}-\left(\frac{aa^{''}+a^{'}2}{b^2}-2\frac{aa^{'}b^{'}}{b^3}\right)\gamma_{ij}$$
$$-\left(\frac{aa^{'}n^{'}}{nb^2}+\frac{a\dot{a}\dot{b}}{bn^2}-\frac{aa^{'}b^{'}}{b^3}-3(\frac{a^{'}}{b})^2+2(\frac{a^{'}}{b})^2\right)\gamma_{ij}$$

Donc

$$\tilde{R}_{ij}=\left(\frac{a\ddot{a}}{n^2}+2(\frac{\dot{a}}{n})^2-\frac{a\dot{a}\dot{n}}{n^3}-\frac{aa^{''}}{b^2}-2(\frac{a^{'}}{b})^2+\frac{aa^{'}b^{'}}{b^3}-\frac{aa^{'}n^{'}}{nb^2}+\frac{a\dot{a}\dot{b}}{bn^2}+2k\right)\gamma_{ij}\qquad\text{(A.51)}$$

La contraction du tenseur de Ricci $\tilde{R}_{ij}$ avec $\tilde{g}_{ij}$, on obtient le scalaire de Ricci R

$$\tilde{R}=\left(\frac{-1}{n^2}\right)\left(\frac{nn^{''}}{b^2}-\frac{nn^{'}b^{'}}{b^3}-3\frac{\ddot{a}}{a}-\frac{\ddot{b}}{b}+3\frac{\dot{a}\dot{n}}{an}+\frac{\dot{b}\dot{n}}{bn}+3\frac{nn^{'}a^{'}}{ab^2}\right)$$
$$+\left(\frac{1-kr^2}{a^2}\right)\left(\frac{a\ddot{a}}{n^2}+2\frac{\dot{a}^2}{n^2}-\frac{a\dot{a}\dot{n}}{n^3}-\frac{aa^{''}}{b^2}-2\frac{a^{'2}}{b^2}+\frac{aa^{'}b^{'}}{b^3}+\frac{a\dot{a}\dot{b}}{bn^2}-\frac{aa^{'}n^{'}}{nb^2}+2k\right)\left(\frac{1}{1-kr^2}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{a^2r^2}\right)\left(\frac{a\ddot{a}}{n^2}+2\frac{\dot{a}^2}{n^2}-\frac{a\dot{a}\dot{n}}{n^3}-\frac{aa^{''}}{b^2}-2\frac{a^{'2}}{b^2}+\frac{aa^{'}b^{'}}{b^3}+\frac{a\dot{a}\dot{b}}{bn^2}-\frac{aa^{'}n^{'}}{nb^2}+2k\right)\left(r^2\right)$$
$$+\left(\frac{1}{a^2r^2\sin^2\theta}\right)\left(\frac{a\ddot{a}}{n^2}+2\frac{\dot{a}^2}{n^2}-\frac{a\dot{a}\dot{n}}{n^3}-\frac{aa^{''}}{b^2}-2\frac{a^{'2}}{b^2}+\frac{aa^{'}b^{'}}{b^3}+\frac{a\dot{a}\dot{b}}{bn^2}-\frac{aa^{'}n^{'}}{nb^2}+2k\right)\left(a^2r^2\sin^2\theta\right)$$
$$+\left(\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{b\ddot{b}}{n^2}-\frac{b\dot{b}\dot{n}}{n^3}-\frac{n^{''}}{n}-3\frac{a^{''}}{a}+3\frac{b\dot{b}\dot{a}}{an^2}+\frac{b^{'}n^{'}}{bn}+3\frac{a^{'}b^{'}}{ab}\right)$$

$$\tilde{R}=-\left(\frac{n^{''}}{nb^2}-\frac{n^{'}b^{'}}{nb^3}-3\frac{\ddot{a}}{an^2}-\frac{\ddot{b}}{bn^2}+3\frac{\dot{a}\dot{n}}{an^3}+\frac{\dot{b}\dot{n}}{bn^3}+3\frac{n^{'}a^{'}}{ab^2n}\right)$$
$$+3\left(\frac{\ddot{a}}{an^2}+2(\frac{\dot{a}^2}{a^2n^2}-\frac{\dot{a}\dot{n}}{an^3}-\frac{a^{''}}{ab^2}-2(\frac{a^{'}}{ab})^2+\frac{a^{'}b^{'}}{ab^3}-\frac{a^{'}n^{'}}{anb^2}+\frac{\dot{a}\dot{b}}{abn^2}+\frac{2k}{a^2}\right)$$
$$+\left(\frac{\ddot{b}}{bn^2}-\frac{\dot{b}\dot{n}}{bn^3}-\frac{n^{''}}{nb^2}-3\frac{a^{''}}{ab^2}+3\frac{\dot{b}\dot{a}}{abn^2}+\frac{b^{'}n^{'}}{b^3n}+3\frac{a^{'}b^{'}}{ab^3}\right)$$

En utilisant $\tilde{g}_{ij} = a^2(\tau, y)\gamma_{ij}$ et l'équation (A.49), on trouve

$$\begin{aligned}\tilde{R} &= 2\left(-\frac{n^{''}}{b^2 n} + \frac{n^{'}b^{'}}{nb^3} + \frac{\ddot{b}}{bn^2} - \frac{\dot{b}\dot{n}}{bn^3}\right) \\ &+ 6\left(\frac{\ddot{a}}{an^2} - \frac{\dot{a}\dot{n}}{an^3} - \frac{a^{''}}{ab^2} + \frac{a^{'}b^{'}}{ab^3} - \frac{a^{'}n^{'}}{anb^2} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{abn^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2n^2} - \frac{a^{'2}}{a^2b^2} + \frac{k}{a^2}\right) \qquad (A.52)\end{aligned}$$

En utilisant le tenseur de Ricci R_{ij}et le scalaire R, on calcule le tenseur d'Einstein, où son expression est donnée par

$$\tilde{G}_{AB} = \tilde{R}_{AB} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{AB} \qquad (A.53)$$

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{00} &= 3\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{a^{''}n^2}{ab^2} + \frac{a^{'}b^{'}n^2}{ab^3} - \frac{a^{'2}n^2}{a^2b^2} + \frac{kn^2}{a^2}\right) \\ \tilde{G_{ij}} &= \left[\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{2a^{''}}{a} + \frac{a^{'2}}{a^2} - 2\frac{a^{'}b^{'}}{ab} + 2\frac{a^{'}n^{'}}{an} + \frac{n^{''}}{n} - \frac{n^{'}b^{'}}{nb}\right)\right]\gamma_{ij} \\ &- \left[\frac{a^2}{n^2}\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} - 2\frac{\dot{a}\dot{n}}{an} + 2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\ddot{b}}{b} - \frac{\dot{b}\dot{n}}{bn}\right) - k\right]\gamma_{ij} \\ \tilde{G}_{44} &= 3\left(\frac{a^{'2}}{a^2} + \frac{a^{'}n^{'}}{an} - \frac{\ddot{a}b^2}{an^2} + \frac{\dot{a}\dot{n}b^2}{an^3} - \frac{b^2\dot{a}^2}{an^2} - \frac{kb^2}{a^2}\right) \\ \tilde{G}_{04} &= -3\left(\frac{\dot{a}^{'}}{a} - \frac{\dot{a}n^{'}}{an} - \frac{a^{'}\dot{b}}{ab}\right) \qquad (A.54)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{00} &= \tilde{R}_{00} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{00}\tilde{R} \\ &= \left(\frac{nn^{''}}{b^2} - \frac{nn^{'}b^{'}}{b^3} - 3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{b}}{b} + 3\frac{\dot{a}\dot{n}}{an} + \frac{\dot{b}\dot{n}}{bn} + 3\frac{nn^{'}a^{'}}{ab^2}\right) \\ &- \frac{1}{2}\left(-n^2\right)2\left(-\frac{n^{''}}{b^2n} + \frac{n^{'}b^{'}}{nb^3} + \frac{\ddot{b}}{bn^2} - \frac{\dot{b}\dot{n}}{bn^3}\right) nonumber \qquad (A.55) \\ &- \frac{1}{2}\left(-n^2\right)6\left(\frac{\ddot{a}}{an^2} - \frac{\dot{a}\dot{n}}{an^3} - \frac{a^{''}}{ab^2} + \frac{a^{'}b^{'}}{ab^3} - \frac{a^{'}n^{'}}{anb^2} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{abn^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2n^2} - \frac{a^{'2}}{a^2b^2} + \frac{k}{a^2}\right) \\ & \qquad (A.56)\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{00} &= \left(\frac{nn^{''}}{b^2} - \frac{nn^{'}b^{'}}{b^3} - 3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{b}}{b} + 3\frac{\dot{a}\dot{n}}{an} + \frac{\dot{b}\dot{n}}{bn} + 3\frac{nn^{'}a^{'}}{ab^2}\right) \\ &+ \left(-\frac{nn^{''}}{b^2} + \frac{nn^{'}b^{'}}{b^3} + \frac{\ddot{b}}{b} - \frac{\dot{b}\dot{n}}{bn}\right) \\ &+ 3\left((\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}\dot{n}}{an} - \frac{a^{''}n^2}{ab^2} + \frac{a^{'}b^{'}n^2}{ab^3} - \frac{a^{'}n^{'}n}{ab^2} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{a^{'2}n^2}{a^2b^2} + \frac{kn^2}{a^2})\right)\end{aligned}$$

$$\tilde{G}_{00} = 3\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{a^{''}n^2}{ab^2} + \frac{a^{'}b^{'}n^2}{ab^3} - \frac{a^{'2}n^2}{a^2b^2} + \frac{kn^2}{a^2}\right) \tag{A.57}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{ij} &= \tilde{R_{ij}} - \frac{1}{2}\tilde{g_{ij}}\tilde{R} \\
&= \left[\left(\frac{a\ddot{a}}{n^2} + 2(\frac{\dot{a}}{n})^2 - \frac{a\dot{a}\dot{n}}{n^3} - \frac{aa^{''}}{b^2} - 2(\frac{a^{'}}{b})^2 + \frac{aa^{'}b^{'}}{b^3} - \frac{aa^{'}n^{'}}{nb^2} + \frac{a\dot{a}\dot{b}}{bn^2} + 2k\right)\gamma_{ij}\right] \\
&- \frac{1}{2}\left(a^2\gamma_{ij}\right)\left[2\left(-\frac{n^{''}}{b^2n} + \frac{n^{'}b^{'}}{nb^3} + \frac{\ddot{b}}{bn^2} - \frac{b\dot{b}\dot{n}}{bn^3}\right)\right] \\
&- \frac{1}{2}\left(a^2\gamma_{ij}\right)\left[6\left(\frac{\ddot{a}}{an^2} - \frac{\dot{a}\dot{n}}{an^3} - \frac{a^{''}}{ab^2} + \frac{a^{'}b^{'}}{ab^3} - \frac{a^{'}n^{'}}{anb^2} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{abn^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2n^2} - \frac{a^{'2}}{a^2b^2} + \frac{k}{a^2}\right)\right] \\
&= \left[\frac{a^2}{b^2}\left(-\frac{a^{''}}{a} - 2\frac{a^{'2}}{a^2} + \frac{a^{'}b^{'}}{ab} - \frac{a^{'}n^{'}}{an} + \frac{n^{''}}{n} - \frac{n^{'}b^{'}}{nb} + 3\frac{a^{''}}{a} - 3\frac{a^{'}b^{'}}{ab} + 3\frac{a^{'}n^{'}}{an} + 3\frac{a^{'2}}{a^2}\right)\right]\gamma_{ij} \\
&+ \left[\frac{a^2}{n^2}\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\dot{a}\dot{n}}{an} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{\ddot{b}}{b} - \frac{\dot{b}\dot{n}}{bn} - 3\frac{\ddot{a}}{a} + 3\frac{\dot{a}\dot{n}}{an} - 3\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - 3\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) - k\right]\gamma_{ij}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{ij} &= \left[\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{2a^{''}}{a} + \frac{a^{'2}}{a^2} - 2\frac{a^{'}b^{'}}{ab} + 2\frac{a^{'}n^{'}}{an} + \frac{n^{''}}{n} - \frac{n^{'}b^{'}}{nb}\right)\right]\gamma_{ij} \\
&- \left[\frac{a^2}{n^2}\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} - 2\frac{\dot{a}\dot{n}}{an} + 2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\ddot{b}}{b} - \frac{\dot{b}\dot{n}}{bn}\right) - k\right]\gamma_{ij}
\end{aligned} \tag{A.58}$$

De même manière manière, on aura

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{44} &= \tilde{R}_{44} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{44}\tilde{R} \\
\tilde{G}_{44} &= \left(\frac{b\ddot{b}}{n^2} - \frac{b\dot{b}\dot{n}}{n^3} - \frac{n^{''}}{n} - 3\frac{a^{''}}{a} + 3\frac{b\dot{b}\dot{a}}{an^2} + \frac{b^{'}n^{'}}{bn} + 3\frac{a^{'}b^{'}}{ab}\right) \\
&- \frac{1}{2}\left(b^2\right)\left[2\left(-\frac{n^{''}}{b^2n} + \frac{n^{'}b^{'}}{nb^3} + \frac{\ddot{b}}{bn^2} - \frac{\dot{b}\dot{n}}{bn^3}\right)\right] \\
&- \frac{1}{2}\left(b^2\right)\left[6\left(\frac{\ddot{a}}{an^2} - \frac{\dot{a}\dot{n}}{an^3} - \frac{a^{''}}{ab^2} + \frac{a^{'}b^{'}}{ab^3} - \frac{a^{'}n^{'}}{anb^2} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{abn^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2n^2} - \frac{a^{'2}}{a^2b^2} + \frac{k}{a^2}\right)\right] \\
&= \left(\frac{b\ddot{b}}{n^2} - \frac{b\dot{b}\dot{n}}{n^3} - \frac{n^{''}}{n} - 3\frac{a^{''}}{a} + 3\frac{b\dot{b}\dot{a}}{an^2} + \frac{b^{'}n^{'}}{bn} + 3\frac{a^{'}b^{'}}{ab}\right) \\
&+ \left(\frac{n^{''}}{n} - \frac{n^{'}b^{'}}{nb} - \frac{b\ddot{b}}{n^2} + \frac{b\dot{b}\dot{n}}{n^3} - 3\frac{\ddot{a}b^2}{an^2} + 3\frac{\dot{a}\dot{n}b^2}{an^3} + 3\frac{a^{''}}{a} - 3\frac{a^{'}b^{'}}{ab}\right) \\
&+ \left(3\frac{a^{'}n^{'}}{an} - 3\frac{\dot{a}\dot{b}b}{an^2} - 3\frac{\dot{a}^2b^2}{a^2n^2} + 3\frac{a^{'2}}{a^2} - 3\frac{kb^2}{a^2}\right)
\end{aligned}$$

Donc, on aura

$$\tilde{G}_{44} = 3\left(\frac{a^{'2}}{a^2} + \frac{a^{'}n^{'}}{an} - \frac{\ddot{a}b^2}{an^2} + \frac{\dot{a}\dot{n}b^2}{an^3} - \frac{b^2\dot{a}^2}{an^2} - \frac{kb^2}{a^2}\right)$$

Maintenant pour

$$\tilde{G}_{04} = \tilde{R_{04}} - \frac{1}{2}\tilde{g_{04}}\tilde{R}$$

On a $\tilde{g_{04}} = 0$ donc $\tilde{G}_{04} = \tilde{R}_{05}$

$$\tilde{G}_{04} = -3\left(\frac{\dot{a}^{'}}{a} - \frac{\dot{a}n^{'}}{an} - \frac{a^{'}\dot{b}}{ab}\right) \tag{A.59}$$

A.6 La fonction F

$$F(\tau, y) = \frac{(aa^{'})^2}{b^2} - \frac{(a\dot{a})^2}{n^2} - ka^2 \tag{A.60}$$

$$F^{'} = \partial_5 F(\tau, y) = \partial_5\left(\frac{(aa^{'})^2}{b^2} - \frac{(a\dot{a})^2}{n^2} - ka^2\right) \tag{A.61}$$

$$\begin{aligned}
F^{'} &= \frac{2(aa^{'})(aa^{''} + a^{'2})b^2 - 2bb^{'}(aa^{'})^2}{b^4} - \frac{2(a\dot{a})(a\dot{a}^{'} + a^{'}\dot{a})n^2}{n^4} - \frac{2nn^{'}(a\dot{a})^2}{n^4} - k(2aa^{'}) \\
&= \frac{2aa^{'}(aa^{''} + a^{'2}}{b^2} - \frac{2bb^{'}(aa^{'})^2}{b^3} - \frac{2(a\dot{a})(a\dot{a}^{'} + a^{'}\dot{a})}{n^3} + \frac{2n^{'}(a\dot{a})^2}{n^3} - 2kaa^{'} \\
&= -\frac{2a^3a^{'}}{n^2}\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{a^{''}n^2}{ab^2} - \frac{a^{'2}n^2}{a^2b^2} + \frac{a^{'}b^{'}n^2}{ab^3} + \frac{kn^2}{a^2}\right) - \frac{2a^3\dot{a}}{n^2}\left(\frac{\dot{a}^{'}}{a} - \frac{\dot{a}n^{'}}{an}\right)
\end{aligned} \tag{A.62}$$

On ajoute ce terme dans l'égalité ci dessus

$$\left\{-\frac{2a^3}{n^2}\left(\frac{a^{'}\dot{a}\dot{b}}{ab}\right) + \frac{2a^3}{n^2}\left(\frac{a^{'}\dot{a}\dot{b}}{ab}\right)\right\} \tag{A.63}$$

On trouve

$$\begin{aligned}
F^{'} &= -\frac{2a^3a^{'}}{n^2}\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{a^{''}n^2}{ab^2} - \frac{a^{'2}n^2}{a^2b^2} + \frac{a^{'}b^{'}n^2}{ab^3} + \frac{kn^2}{a^2}\right) - \frac{2a^3\dot{a}}{n^2}\left(\frac{\dot{a}^{'}}{a} - \frac{\dot{a}n^{'}}{an} - \frac{a^{'}\dot{b}}{ab}\right) \\
&= -\frac{2a^3a^{'}}{n^2}\left(\frac{1}{3}\tilde{G_{00}}\right) - \frac{2a^3\dot{a}}{n^2}\left(\frac{1}{3}\tilde{G_{05}}\right)
\end{aligned} \tag{A.64}$$

On a $\tilde{G}_{04} = 0$, en effet

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{04} &= \kappa^2 \left(\tilde{T}_{AB} + \tilde{U}_{AB}\right) \\
&= \kappa^2 \left(-\frac{\delta(y)}{\mu^2 b}\tilde{G}_{04}\right) \\
\tilde{G}_0 &\left(1 + \kappa^2 \frac{\delta(y)}{\mu^2 b}\right) = 0 \\
\tilde{G}_{04} = 0 &
\end{aligned}$$

Donc il reste

$$F^{'} = -\frac{2a^3 a^{'}}{3n^2}\left(\tilde{G_{00}}\right) \tag{A.65}$$

On calcule $\dot{F}$

$$\begin{aligned}
\dot{F} &= \partial_0 F(\tau, y) \\
&= \frac{2(aa^{'})(a\dot{a}^{'} + a^{'}\dot{a})b^2 - 2b\dot{b}(aa^{'})^2}{b^4} - \frac{2(a\dot{a})(a\ddot{a} + \dot{a}^2)n^2}{n^4} - \frac{2n\dot{n}(a\dot{a})^2}{n^4} - k(2a\dot{a}) \\
&= \frac{2(a^{'}a)(\dot{a}^{'}a + a^{'}\dot{a})}{b^2} - \frac{2\dot{b}(a^{'}a)^2}{b^3} - \frac{2(\dot{a}a)(\ddot{a}a + \dot{a}^2)}{n^2} + \frac{2\dot{n}(\dot{a}a)^2}{n^3} - 2ka\dot{a} \\
&= \frac{2a^3\dot{a}}{b^2}\left(\frac{a^{'2}}{a^2} - \frac{b^2\dot{a}^2}{n^2a^2} - \frac{b^2\ddot{a}}{an^2} + \frac{\dot{a}\dot{n}b^2}{an^3} - \frac{kb^2}{a^2}\right) + \frac{2a^3a^{'}}{b^2}\left(\frac{\dot{a}^{'}}{a} - \frac{a^{'}\dot{b}}{ab}\right)
\end{aligned} \tag{A.66}$$

De même façon on rajoute ce terme

$$\left\{-\frac{2a^3}{b^2}\left(\frac{a^{'}\dot{a}n^{'}}{an}\right) + \frac{2a^3}{b^2}\left(\frac{a^{'}\dot{a}n^{'}}{an}\right)\right\} \tag{A.67}$$

$$\begin{aligned}
\dot{F} &= \frac{2a^3\dot{a}}{b^2}\left(\frac{a^{'2}}{a^2} + \frac{a^{'}n^{'}}{an} - \frac{b^2\dot{a}^2}{n^2a^2} - \frac{b^2\ddot{a}}{an^2} + \frac{\dot{a}\dot{n}b^2}{an^3} - \frac{kb^2}{a^2}\right) + \frac{2a^3a^{'}}{b^2}\left(\frac{\dot{a}^{'}}{a} - \frac{\dot{a}n^{'}}{an} - \frac{a^{'}\dot{b}}{ab}\right) \\
&= \frac{2a^3\dot{a}}{3b^2}\tilde{G_{55}}
\end{aligned} \tag{A.68}$$

ANNEXE B

Calculs intermédiaires du chapitre 3

B.1 Les équations de Friedmann dans la brane

Les équations de Friedmann s'écrivent comme suit

$$\begin{aligned} H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) &= \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}. \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3}\left(3p + \rho\right). \end{aligned} \tag{B.1}$$

En effet:

B.1.1 Calcul des symbôles de Christoffel

Soit la métrique

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(\frac{dr^2}{(1 - kr^2)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right). \tag{B.2}$$

Les symbôles de Christoffel dans ce cas sont

1.

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{00} &= \frac{1}{2}g^{0\rho}\left(\partial_0 g_{0\rho} + \partial_0 g_{\rho 0} - \partial_\rho g_{00}\right) \\ &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_0 g_{00}) = \frac{1}{2}(-1)(\partial_0(-1)) = 0. \end{aligned} \tag{B.3}$$

2.

$$\Gamma^i_{0j} = \frac{1}{2} g^{i\rho} \left(\partial_0 g_{j\rho} + \partial_j g_{\rho 0} - \partial_\rho g_{0j}\right)$$
$$= \frac{1}{2} g^{ik} (\partial_0 g_{jk} + \partial_j g_{k0} - \partial_k g_{0j}) = \frac{1}{2} g^{ik} (\partial_0 g_{jk})$$
$$= \frac{1}{2} (\frac{1}{a^2} \gamma^{ik})(2a\dot{a}\gamma_{jk}) = \frac{\dot{a}}{a} \delta^i_j. \tag{B.4}$$

3.

$$\Gamma^0_{ij} = \frac{1}{2} g^{0\rho} \left(\partial_i g_{j\rho} + \partial_j g_{\rho i} - \partial_\rho g_{ij}\right)$$
$$= \frac{1}{2} g^{00} (\partial_i g_{j0} + \partial_j g_{0i} - \partial_0 g_{ij}) = \frac{1}{2}(-1)(\partial_0 g_{ij})$$
$$= -\frac{1}{2}(2a\dot{a}\gamma_{ij}) = a\dot{a}\gamma_{ij}. \tag{B.5}$$

Les tenseurs de Ricci, $R_{\mu\nu}$, avec le scalaire de Ricci, R, sont

$$R_{00} = -3 \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)$$
$$R_{ij} = \left(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k\right) \gamma_{ij}$$
$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a} + \frac{k}{a^2}\right) \tag{B.6}$$

En effet

$$R_{00} = \Gamma^0_{00,0} - \Gamma^0_{00,0} - \Gamma^1_{01,0} - \Gamma^2_{02,0} - \Gamma^3_{03,0} + \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{00} + \Gamma^1_{01}\Gamma^0_{00}$$
$$+ \Gamma^2_{02}\Gamma^0_{00} + \Gamma^3_{03}\Gamma^0_{00} - \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{00} - \Gamma^1_{10}\Gamma^1_{10} - \Gamma^2_{20}\Gamma^2_{20} - \Gamma^3_{30}\Gamma^3_{30}$$
$$= -3\partial_0 \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) - 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -3\left(\frac{a\ddot{a} - \dot{a}^2}{a^2}\right) - 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2$$
$$R_{00} = -3\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) \tag{B.7}$$

$$R_{ij} = \Gamma^\lambda_{ij,\lambda} - \Gamma^\lambda_{i\lambda,j} + \Gamma^\lambda_{\alpha\lambda}\Gamma^\alpha_{ij} - \Gamma^\lambda_{\alpha i}\Gamma^\alpha_{\lambda j}$$
$$= \Gamma^0_{ij,0} + 3(\Gamma^k_{0k}\Gamma^0_{ij}) - 2(\Gamma^k_{0i}\Gamma^0_{kj})$$
$$= \partial_0 \left(a\dot{a}\gamma_{ij}\right) + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\left(a\dot{a}\right)\gamma_{ij} = \left(a\ddot{a} + \dot{a}^2\right)\gamma_{ij} + \dot{a}^2\gamma_{ij}$$
$$R_{ij} = \left(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k\right)\gamma_{ij} \tag{B.8}$$

Le scalaire de Ricci, R, est

$$
\begin{aligned}
R &= g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} \\
&= 3\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{1-kr^2}{a^2}\right)\left(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k\right)\left(\frac{1}{1-kr^2}\right) + \left(\frac{1}{a^2r^2}\right)\left(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k\right)(r^2) \\
&+ \left(\frac{1}{a^2r^2\sin^2\theta}\right)\left(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k\right)(r^2\sin^2\theta) \\
R &= 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a} + \frac{k}{a^2}\right) \qquad \text{(B.9)}
\end{aligned}
$$

Les tenseurs d'Einstein sont donnés par

$$
G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu} \qquad \text{(B.10)}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{00} &= 3\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) \\
G_{11} &= \left(\frac{1}{1-kr^2}\right)\left(-2a\ddot{a} - \dot{a}^2 - k\right) \qquad \text{(B.11)}
\end{aligned}
$$

En effet

$$
\begin{aligned}
G_{00} &= R_{00} - \frac{1}{2}g_0 R \\
&= -3\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) + 3\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a} + \frac{k}{a^2}\right) = 3(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\Big) \qquad \text{(B.12)}
\end{aligned}
$$

On a:

$$
T_{\mu\nu} = T_\mu^A g_{A\nu} \qquad \text{(B.13)}
$$

Avec, $T_\nu^\mu = diag(-\rho, p, p, p)$, on aura

$$
T_{00} = T_0^A g_{A0} = T_0^0 g_{00} = (-\rho)(-1) = \rho \qquad \text{(B.14)}
$$

La première équation de Friedmann est

$$
\begin{aligned}
G_{00} &= 8\pi G T_{00} \\
3(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}) &= 8\pi G\rho \qquad \text{(B.15)}
\end{aligned}
$$

$$
H^2 \equiv (\frac{\dot{a}}{a})^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2} \qquad \text{(B.16)}
$$

La deuxième équation de Friedmann est

$$\begin{aligned} G_{11} &= R_{11} - \frac{1}{2} g_{11} R = 8\pi G T_{11} \\ &= \left(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k\right)\left(\frac{1}{1-kr^2}\right) - 3\left(\frac{a^2(t)}{1-kr^2}\right)\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{1-kr^2}\right)\left(-2a\ddot{a} - \dot{a}^2 - k\right) \end{aligned} \tag{B.17}$$

Donc

$$\begin{aligned} G_{11} &= 8\pi G T_{11} \\ \frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k}{1-kr^2} &= 8\pi G p\left(\frac{a^2(t)}{1-kr^2}\right) \\ -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k}{a^2} &= 8\pi G p \end{aligned} \tag{B.18}$$

On utilise la première equation de Friedmann on trouve

$$\begin{aligned} -2\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{8\pi G\rho}{3}\right) &= 8\pi G p \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= 4\pi G\left(p + \frac{\rho}{3}\right) \end{aligned} \tag{B.19}$$

On aura finalement la 2^{me} équation de Friedmann.

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi G}{3}(3p + \rho) \tag{B.20}$$

B.2 Équation de continuité

Considérant un univers de matière non relativiste (p=0) et son constante cosmologique $(\Lambda = 0)$[14]. Soit une surface sphérique comobile de rayon $ra(t)$ dans un fluide cosmique, la vitesse est $V = r\dot{a}(t)$, l'énergie cinétique vaut $\frac{1}{2}r^2\dot{a}^2(t)$ et l'énergie gravitationnelle est $-\frac{4\pi G\rho}{3}a^2(t)r^2$(à la présence de la masse à l'intérieure de la coquille sphérique), on obtient cette expression par analogie avec$(\frac{-GM}{R})$ou ici le terme $(\frac{4}{3}\pi(ra(t))^3\rho)$ joue le rôle de M et $ra(t)$ joue le rôle de R. l'énergie total étant conservé, posant cette constante égale à $(-\frac{r^2k}{2})$

$$\frac{1}{2}r^2\dot{a}^2(t) - \frac{4}{3}\pi G\rho a^2(t)r^2 = -\frac{r^2k}{2} \tag{B.21}$$

En multipliant cette dernière par $\left(\frac{6}{r^2a^2(t)}\right)$, on obtient:

$$3\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} + 3\frac{k}{a^2(t)} = 8\pi G\rho \tag{B.22}$$

C'est la première équation de Friedmann, multipliant cette dernière équation par $a^3(t)$ et dérivant la par rapport au temps cosmique, on obtient:

$$3\dot{a}^2(t)a(t) + 3ka(t) = 8\pi G\rho a^3(t) \tag{B.23}$$

La dérivation de (B.23) donne:

$$\begin{aligned} 6a(t)\ddot{a}(t)\dot{a} + 3\dot{a}^3(t) + 3k\dot{a}(t) &= \frac{d}{dt}(8\pi G\rho a^3(t)) \\ 3a^2(t)\dot{a}(t)(2\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} + \frac{k}{a^2(t)}) &= \frac{d}{dt}(8\pi G\rho a^3(t)) \end{aligned} \tag{B.24}$$

Pour un univers sans constante cosmologique et composé de poussière(p=0), la seconde équation de Friedmann a le membre gauche nul, donc:

$$\frac{4}{3}\pi G\rho = 0 \tag{B.25}$$

On multiplie par $a^3(t)$ et dérivant par rapport au temps:

$$\frac{d}{dt}(\frac{4}{3}\pi G\rho a^3(t)) = 0 \tag{B.26}$$

La masse ($\frac{4}{3}\pi\rho a^3$) dans le volume comobile ne change pas, à la limite classique, les équations de Friedmann traduisent la continuité et la conservation de l'énergie.
Avant de rechercher quelques solutions cosmologiques, il faut réécrire les équations de Friedmann sous une autre forme.
En dérivant la première équation de Friedmann et en réduisant au même dénominateur, on aura:

$$\begin{aligned} 3\frac{\dot{a}^2}{a^2(t)} + \frac{3k}{a^2(t)} &= 8\pi G\rho \\ \frac{6\dot{a}(t)a^2(t)\ddot{a}(t) - 6\dot{a}^3a(t)}{a^4(t)} - \frac{6a(t)\dot{a}(t)k}{a^4(t)} &= 8\pi G\dot{\rho} \\ \frac{6\dot{a}(t)\ddot{a}(t)a(t) - 6\dot{a}^3(t) - 6\dot{a}(t)k}{a^3(t)} &= 8\pi G\dot{\rho} \\ \frac{6\dot{a}(t)a(t)\ddot{a}(t) - 6\dot{a}^3(t) - 6\dot{a}(t)k}{8\pi Ga^3(t)} &= \dot{\rho} \end{aligned} \tag{B.27}$$

La deuxième équation de friedmann est:

$$\begin{aligned} -\frac{2\ddot{a}(t)}{a(t)} - \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} - \frac{k}{a^2(t)} &= 8\pi Gp \\ \frac{-2\ddot{a}(t)a(t) - \dot{a}^2(t) - k}{a^2(t)} &= 8\pi Gp \end{aligned} \tag{B.28}$$

On multiplie par $(\frac{3\dot{a}(t)}{8\pi G a(t)})$ dans la seconde équation de Friedmann on obtient:

$$\frac{-6\ddot{a}(t)\dot{a}(t)a(t)-3\dot{a}^3(t)-3k\dot{a}(t)}{8\pi G a^3(t)}=\frac{3\dot{a}(t)p}{a(t)} \tag{B.29}$$

En fait l'addition entre (B.27)et (B.29), on trouve:

$$\dot{\rho}+\frac{3\dot{a}(t)p}{a(t)}=-\frac{3\dot{a}(t)}{8\pi G a(t)}\left(\frac{3\dot{a}^2(t)+3k}{a^2(t)}\right) \tag{B.30}$$

En remplaçant la 1^{re} équation de Friedmann dans le deuxième membre de l'équation précédente, on aura:

$$\dot{\rho}+3Hp=-\frac{3}{8\pi G}H(8\pi G\rho) \tag{B.31}$$

Avec $H=\frac{\dot{a}}{a}$
on obtient donc l'équation de continuité:

$$\dot{\rho}+3H(p+\rho)=0 \tag{B.32}$$

B.3 Condition de jonction

La condition de jonction est donnée par:

$$\begin{aligned} \frac{[a']}{a_0 b_0} &= -\frac{\kappa^2}{3}\rho_b+\frac{\kappa^2}{\mu^2 n_0^2}\left(\frac{\dot{a}_0^2}{a_0^2}+k\frac{n_0^2}{a_0^2}\right)\\ \frac{[n']}{n_0 b_0} &= \frac{\kappa^2}{3}(3p_b+2\rho_b)+\frac{\kappa^2}{\mu^2 n_0^2}\left(-\frac{\dot{a}_0^2}{a_0^2}-2\frac{\dot{a}_0\dot{n}_0}{a_0 n_0}+2\frac{\ddot{a}_0}{a_0}-k\frac{n_0^2}{a_0^2}\right) \end{aligned} \tag{B.33}$$

En effet, en utilisant:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{00} &= 3\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2}+\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab}-\frac{n^2}{ab^2}(\hat{a}''+[a']\delta(y))+\frac{a'b'n^2}{ab^3}-\frac{a'^2n^2}{a^2b^2}+\frac{kn^2}{a^2}\right)\\ &= \kappa^2\left(\tilde{T}_{00}+\tilde{U}_{00}\right) \end{aligned} \tag{B.34}$$

Avec

$$\tilde{U}_{00}=-\frac{3\delta(y)}{\mu^2 b}\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2}+k\frac{n^2}{a^2}\right) \tag{B.35}$$

En fait équivaut juste les termes qui contient $\delta(y)$:

$$-\frac{3n^2}{ab^2}[a']\delta(y)=\kappa^2\left(-\rho_b\frac{\delta(y)}{b}(-n^2)-\frac{3\delta(y)}{\mu^2 b}(\frac{\dot{a}^2}{a^2}+k\frac{n^2}{a^2})\right) \tag{B.36}$$

On trouve alors:

$$-\frac{3n^2[a^{'}]}{ab^2}\delta(y) = \kappa^2(\tilde{T}_{00} + \tilde{U}_{00}) = \kappa^2 n^2\frac{\rho_b}{b} - \frac{3\kappa^2}{\mu^2 b}(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + k\frac{n^2}{a^2}) \tag{B.37}$$

Si on substitue l'expression de $a^{''}$ et $n^{''}$ dans l'expression d'Einstein et en considérant juste les termes de $\delta(y)$, à partir de $\tilde{G}_{11}$, on trouve:

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{11} = &\left[\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{2}{a}(\hat{a}^{''} + [a^{'}]\delta(y)) + \frac{1}{n}(\hat{n}^{''} + [n^{'}]\delta(y)) + \frac{a^{'2}}{a^2} + \frac{2a^{'}n^{'}}{an} - 2\frac{a^{'}n^{'}}{an} - 2\frac{a^{'}b^{'}}{ab} - \frac{b^{'}n^{'}}{bn}\right)\right]\gamma_{11}\\ &- \left[\frac{a^2}{n^2}\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} - 2\frac{\dot{a}\dot{n}}{an} + 2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{\dot{b}\dot{n}}{bn}\right) - k\right]\gamma_{11}\end{aligned} \tag{B.38}$$

On s'intéresse juste au terme de $\delta(y)$, on obtient:

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{b^2}\left(2\frac{[a^{'}]}{a} + \frac{[n^{'}]}{n}\right)\gamma_{11} &= \kappa^2(\tilde{T}_{11} + \tilde{U}_{11})\\ &= \kappa^2\frac{p_b}{b}a^2\gamma_{11} - \frac{\kappa^2}{\mu^2 b}\left[\frac{a^2}{n^2}\left(-\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{\dot{a}\dot{n}}{an} - 2\frac{\ddot{a}}{a}\right) - k\right]\gamma_{11}\end{aligned} \tag{B.39}$$

Maintenant on multiplie les deux cotés de l'équation (B.37) par ce terme $(\frac{-b}{3n^2})$, on trouve:

$$\frac{[a^{'}]}{ab} = -\frac{\kappa^2}{3}\rho_b + \frac{\kappa^2}{\mu^2 n^2}\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + k\frac{n^2}{a^2}\right) \tag{B.40}$$

Et multipliant(B.39) par $(\frac{b}{a^2})$:

$$\left(2\frac{[a^{'}]}{ab} + \frac{[n^{'}]}{nb}\right)\gamma_{11} = \kappa^2 p_b\gamma_{11} - \frac{\kappa^2}{\mu^2 n^2}\left[\left(-\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{\dot{a}\dot{n}}{an} - 2\frac{\ddot{a}}{a}\right) - k\right]\gamma_{11} \tag{B.41}$$

$$\frac{[n^{'}]}{nb} = -2\frac{[a^{'}]}{ab} + \kappa^2 p_b - \frac{\kappa^2}{\mu^2 n^2}\left[\left(-\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{\dot{a}\dot{n}}{an} - 2\frac{\ddot{a}}{a}\right) - \frac{k}{a^2}\right] \tag{B.42}$$

Remplaçant $\frac{[a^{'}]}{ab}$ par son expression:

$$\frac{[n^{'}]}{nb} = -2\left[-\frac{\kappa^2}{3}\rho_b + \frac{\kappa^2}{\mu^2 n^2}\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + k\frac{n^2}{a^2}\right)\right] + \kappa^2 p_b - \frac{\kappa^2}{\mu^2 n^2}\left[\left(-\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{\dot{a}\dot{n}}{an} - 2\frac{\ddot{a}}{a}\right) - \frac{k}{a^2}\right] \tag{B.43}$$

On combine les résultats trouvés, on obtient les conditions de jonction:

$$\begin{aligned}\frac{[a^{'}]}{a_0 b_0} &= -\frac{\kappa^2}{3}\rho_b + \frac{\kappa^2}{\mu^2 n_0^2}\left(\frac{\dot{a}_0^2}{a_0^2} + k\frac{n_0^2}{a_0^2}\right)\\ \frac{[n^{'}]}{n_0 b_0} &= \frac{\kappa^2}{3}(3p_b + 2\rho_b) + \frac{\kappa^2}{\mu^2 n_0^2}\left(-\frac{\dot{a}_0^2}{a_0^2} - 2\frac{\dot{a}_0\dot{n}_0}{a_0 n_0} + 2\frac{\ddot{a}_0}{a_0} - k\frac{n_0^2}{a_0^2}\right)\end{aligned} \tag{B.44}$$

ANNEXE C

Calculs intermédiaires du chapitre 4

Symbôles de Christoffel

La métrique utilisée est donnée par:

$$ds^2 = -e^{N(r,y)}dt^2 + e^{A(r,y)}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) + dy^2. \tag{C.1}$$

Et utilisant la formule suivante:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}\left(g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}\right). \tag{C.2}$$

On trouve:

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma^t_{tt} = 0 & \Gamma^r_{tt} = \frac{1}{2}e^{N-A}\dot{N} & \Gamma^y_{tt} = \frac{1}{2}e^{N}N' \\
\Gamma^t_{tr} = \frac{1}{2}\dot{N} & \Gamma^r_{tr} = 0 & \Gamma^y_{tr} = 0 \\
\Gamma^t_{ty} = \frac{1}{2}N' & \Gamma^r_{ty} = 0 & \Gamma^y_{ty} = 0 \\
\Gamma^t_{rr} = 0 & \Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\gamma^{im}(\gamma_{mk,j} + \gamma_{mj,k} - \gamma_{jk,m}) & \Gamma^y_{rr} = -\frac{1}{2}e^{A}A' \\
\Gamma^t_{ry} = 0 & \Gamma^r_{ry} = \frac{1}{2}A' & \Gamma^y_{yr} = 0 \\
\Gamma^t_{yy} = 0 & \Gamma^r_{yy} = 0 & \Gamma^y_{yy} = 0
\end{array} \tag{C.3}$$

En effet:

1.

$$\begin{aligned}
\Gamma^t_{tt} &= \frac{1}{2}g^{t\lambda}(g_{\lambda t,t} + g_{t\lambda,t} - g_{tt,\lambda}) \\
&= \frac{1}{2}g^{tt}(g_{tt,t} + g_{tt,t} - g_{tt,t}) = \frac{1}{2}g^{tt}(g_{tt,t}) \\
&= \frac{1}{2}(-e^{-N})(\partial_t(-e^{N})) \\
\Gamma^t_{tt} &= 0.
\end{aligned} \tag{C.4}$$

2.

$$\begin{aligned}
\Gamma^t_{tr} &= \frac{1}{2}g^{t\lambda}(g_{\lambda r,t} + g_{t\lambda,r} - g_{tr,\lambda}) \\
&= \frac{1}{2}g^{tt}(g_{tt,r} + g_{tr,t} - g_{tr,t}) = \frac{1}{2}g^{tt}(g_{tt,r}) \\
&= \frac{1}{2}(-e^{-N})(\partial_r(-e^{N})) \\
&= \frac{1}{2}e^{-N}(\dot{N})e^{N} = \frac{1}{2}(\dot{N}) \\
\Gamma^t_{tr} &= \frac{\dot{N}}{2}.
\end{aligned} \tag{C.5}$$

3.

$$\begin{aligned}
\Gamma^t_{ty} &= \frac{1}{2}g^{t\lambda}(g_{\lambda y,t} + g_{t\lambda,y} - g_{ty,\lambda}) \\
&= \frac{1}{2}g^{tt}(g_{tt,y} + g_{ty,t} - g_{ty,t}) = \frac{1}{2}g^{tt}(g_{tt,y}) \\
&= \frac{1}{2}(-e^{-N})(\partial_r(-e^{N})) \\
&= \frac{1}{2}e^{-N}(N^{'})e^{N} = \frac{1}{2}(N^{'}) \\
\Gamma^t_{ty} &= \frac{N^{'}}{2}.
\end{aligned} \tag{C.6}$$

4.

$$\begin{aligned}
\Gamma^t_{rr} &= \frac{1}{2}g^{t\lambda}(g_{\lambda r,r} + g_{r\lambda,r} - g_{rr,\lambda}) \\
&= \frac{1}{2}g^{tt}(g_{tr,r} + g_{tr,r} - g_{rr,t}) = \frac{1}{2}g^{tt}(-g_{rr,t}) \\
\Gamma^t_{rr} &= 0.
\end{aligned} \tag{C.7}$$

5.

$$\begin{aligned}
\Gamma^t_{ry} &= \frac{1}{2}g^{t\lambda}(g_{\lambda r,y} + g_{y\lambda,r} - g_{ry,\lambda}) \\
&= \frac{1}{2}g^{tt}(g_{tr,y} + g_{ty,r} - g_{ry,t}) \\
\Gamma^t_{ry} &= 0.
\end{aligned} \tag{C.8}$$

6.

$$\begin{aligned}
\Gamma^t_{yy} &= \frac{1}{2}g^{t\lambda}(g_{\lambda y,y} + g_{y\lambda,y} - g_{yy,\lambda}) \\
&= \frac{1}{2}g^{tt}(g_{ty,y} + g_{ty,y} - g_{yy,t}) = \frac{1}{2}g^{tt}(-g_{yy,t}) \\
\Gamma^t_{yy} &= 0.
\end{aligned} \tag{C.9}$$

7.

$$\begin{aligned}
\Gamma^r_{tt} &= \frac{1}{2}g^{r\lambda}(g_{\lambda t,t} + g_{t\lambda,t} - g_{tt,\lambda}) \\
&= \frac{1}{2}g^{rr}(g_{rt,t} + g_{tr,t} - g_{tt,r}) = \frac{1}{2}g^{rr}(-g_{tt,r}) \\
&= -\frac{1}{2}(e^{-A})(\partial_r(-e^{-N})) \\
&= \frac{1}{2}e^{-A}(\dot{N})e^{N} = \frac{1}{2}(\dot{N})e^{N-A} \\
\Gamma^r_{tt} &= \frac{\dot{N}}{2}e^{N-A}.
\end{aligned} \tag{C.10}$$

8.

$$\begin{aligned}
\Gamma^r_{tr} &= \frac{1}{2}g^{r\lambda}(g_{\lambda r,t} + g_{t\lambda,r} - g_{tr,\lambda}) \\
&= \frac{1}{2}g^{rr}(g_{rr,t} + g_{rt,r} - g_{tr,r}) = \frac{1}{2}g^{rr}(g_{rr,t}) \\
\Gamma^r_{tr} &= 0.
\end{aligned} \tag{C.11}$$

9.

$$\begin{aligned}
\Gamma^r_{ty} &= \frac{1}{2}g^{r\lambda}(g_{\lambda y,t} + g_{t\lambda,y} - g_{ty,\lambda}) \\
&= \frac{1}{2}g^{rr}(g_{ry,t} + g_{tr,y} - g_{ty,r}) \\
\Gamma^r_{ty} &= 0.
\end{aligned} \tag{C.12}$$

10.

$$\begin{aligned}
\Gamma^i_{jk} &= \frac{1}{2}g^{i\rho}\left[\partial_j g_{k\rho} + \partial_k g_{\rho j} - \partial_\rho g_{jk}\right] \\
&= \frac{1}{2}g^{im}\left[\partial_j g_{km} + \partial_k g_{mj} - \partial_m g_{jk}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}\right)\gamma^{im}\left[\partial_j(a^2\gamma_{km}) + \partial_k(a^2\gamma_{mj}) - \partial_m(a^2\gamma_{jk})\right] \\
\Gamma^i_{jk} &= \frac{1}{2}\gamma^{im}\left[\gamma_{km,j} + \gamma_{mj,k} - \gamma_{jk,m}\right].
\end{aligned} \tag{C.13}$$

11.

$$\begin{aligned}\Gamma^r_{ry} &= \frac{1}{2}g^{rr}(g_{ry,r} + g_{rr,y} - g_{ry,r}) = \frac{1}{2}g^{rr}(g_{rr,y}) \\ &= \frac{1}{2}e^{-A}(\partial_y e^A) = \frac{1}{2}e^{-A}A'e^A \\ \Gamma^r_{ry} &= \frac{A'}{2}. \end{aligned} \tag{C.14}$$

12.

$$\begin{aligned}\Gamma^r_{yy} &= \frac{1}{2}g^{rr}(g_{ry,y} + g_{ry,y} - g_{yy,r}) = \frac{1}{2}g^{rr}(-g_{yy,r}) \\ \Gamma^r_{yy} &= 0. \end{aligned} \tag{C.15}$$

13.

$$\begin{aligned}\Gamma^y_{tt} &= \frac{1}{2}g^{yy}(g_{yt,t} + g_{ty,t} - g_{tt,y}) = \frac{1}{2}g^{yy}(-g_{tt,y}) \\ &= \frac{1}{2}(-\partial_y(-e^N)) = \frac{1}{2}(N'e^N) \\ \Gamma^y_{tt} &= \frac{N'}{2}e^N. \end{aligned} \tag{C.16}$$

14.

$$\begin{aligned}\Gamma^y_{tr} &= \frac{1}{2}g^{yy}(g_{yr,t} + g_{yt,r} - g_{tr,y}) \\ \Gamma^y_{tr} &= 0. \end{aligned} \tag{C.17}$$

15.

$$\begin{aligned}\Gamma^y_{ty} &= \frac{1}{2}g^{yy}(g_{yy,t} + g_{yt,t} - g_{ty,y}) \\ \Gamma^y_{ty} &= 0. \end{aligned} \tag{C.18}$$

16.

$$\begin{aligned}\Gamma^y_{rr} &= \frac{1}{2}g^{yy}(g_{yr,r} + g_{ry,r} - g_{rr,y}) = \frac{1}{2}g^{yy}(-g_{rr,y}) \\ &= \frac{1}{2}(-\partial_y e^A) \\ \Gamma^y_{rr} &= -\frac{1}{2}A'e^A. \end{aligned} \tag{C.19}$$

17.

$$\begin{aligned}\Gamma^y_{yr} &= \frac{1}{2}g^{yy}(g_{yy,r} + g_{yr,y} - g_{ry,y}) \\ \Gamma^y_{yr} &= 0. \end{aligned} \tag{C.20}$$

18.

$$\Gamma^y_{yy} = \frac{1}{2}g^{yy}(g_{yy,y} + g_{yy,y} - g_{yy,y}) = \frac{1}{2}g^{yy}(g_{yy,y})$$
$$\Gamma^y_{yy} = 0. \tag{C.21}$$

Les tenseurs de Ricci

A partir de cette relation:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^\lambda_{\mu\lambda,\nu} + \Gamma^\lambda_{\alpha\lambda}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\alpha\mu}\Gamma^\alpha_{\lambda\nu} \tag{C.22}$$

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= \frac{e^N}{2}\left(N'' + \frac{N'^2}{2} + \frac{N'A'}{2}\right) + e^{N-A}\left(\frac{\ddot{N}}{2} + \frac{\dot{N}^2}{4} - \frac{\dot{N}\dot{A}}{4} + \frac{\dot{N}}{r}\right).\\
R_{rr} &= \frac{e^A}{2}\left(-A'' - \frac{N'A'}{2} + \frac{A'^2}{2}\right) - \frac{\ddot{N}}{2} - \frac{\dot{N}^2}{4} + \frac{\dot{N}\dot{A}}{4} + \frac{\dot{A}}{r}.\\
R_{\theta\theta} &= 1 - e^{-A} - \frac{e^{-A}r^2}{2}\left(\frac{\dot{N}}{r} - \frac{\dot{A}}{r}\right).\\
R_{\phi\phi} &= \sin^2\theta - e^{-A}\sin^2\theta - \frac{e^{-A}r^2\sin^2\theta}{2}\left(-\frac{\dot{A}}{r} + \frac{\dot{N}}{r}\right).\\
R_{yy} &= -\frac{N''}{2} - \frac{A''}{2} - \frac{N'^2}{4} - \frac{A'^2}{4}.\\
R_{ry} &= -\frac{\dot{N}}{4}(N' - A') + \frac{A'}{r} - \frac{\dot{N}'}{2}.
\end{aligned} \tag{C.23}$$

En effet:

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= \Gamma^r_{tt,r} + \Gamma^y_{tt,y} + \Gamma^r_{rr}\Gamma^r_{tt} + \Gamma^r_{yr}\Gamma^y_{tt} + \Gamma^\theta_{r\theta}\Gamma^r_{tt} + \Gamma^\phi_{r\phi}\Gamma^r_{tt} - \Gamma^r_{tt}\Gamma^t_{rt} - \Gamma^y_{tt}\Gamma^t_{yt}\\
&= \partial_r\left(\frac{1}{2}e^{N-A}\dot{N}\right) + \partial_y\left(\frac{1}{2}e^N N'\right) + \frac{\dot{A}}{2}\left(\frac{1}{2}(e^{N-A}\dot{N})\right) + \frac{A'}{2}\left(\frac{N'}{2}e^N\right)\\
&+ \frac{2}{r}\left(\frac{\dot{N}}{2}e^{N-A}\right) - \frac{\dot{N}}{2}\left(\frac{\dot{N}}{2}e^{N-A}\right) - \frac{N'}{2}\left(\frac{N'}{2}e^N\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[\ddot{N} + \dot{N}^2 - \dot{A}\dot{N}\right]e^{N-A} + \frac{1}{2}e^N\left(N'' + N'^2\right) + \frac{\dot{A}\dot{N}}{4}e^{N-A} + \frac{A'N'}{4}e^N\\
&+ \frac{\dot{N}}{r}e^{N-A} - \frac{\dot{N}^2}{4}e^{N-A} - \frac{N'^2}{4}e^N.
\end{aligned} \tag{C.24}$$

$$R_{tt} = \frac{e^N}{2}\left(N'' + \frac{N'^2}{2} + \frac{N'A'}{2}\right) + e^{N-A}\left(\frac{\ddot{N}}{2} + \frac{\dot{N}^2}{4} - \frac{\dot{N}\dot{A}}{4} + \frac{\dot{N}}{r}\right). \tag{C.25}$$

$$
\begin{aligned}
R_{rr} &= \Gamma^{y}_{rr,y} - \Gamma^{t}_{rt,r} - \Gamma^{\theta}_{r\theta,r} - \Gamma^{\phi}_{r\phi,r} + \Gamma^{t}_{rt}\Gamma^{r}_{rr} + \Gamma^{t}_{yt}\Gamma^{y}_{rr} + \Gamma^{\theta}_{r\theta}\Gamma^{r}_{rr} \\
&+ \Gamma^{\phi}_{r\phi}\Gamma^{r}_{rr} - \Gamma^{t}_{tr}\Gamma^{t}_{tr} - \Gamma^{r}_{ry}\Gamma^{y}_{rr} - \Gamma^{\theta}_{\theta r}\Gamma^{\theta}_{\theta r} - \Gamma^{\phi}_{\phi r}\Gamma^{\phi}_{\phi r} - \Gamma^{y}_{rr}\Gamma^{r}_{yr} \\
&= \partial_y\left(-\frac{1}{2}A'e^{A}\right) - \partial_r\left(\frac{1}{2}\dot{N}\right) - 2\partial_r\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{4}\dot{A}\dot{N} - \frac{1}{4}N'A'e^{A} \\
&- \frac{1}{4}A'^2e^{A} + \frac{\dot{A}}{r} - \frac{1}{4}\dot{N}^2 + \frac{1}{4}A'^2e^{A} + \frac{1}{4}A'^2e^{A} - \frac{2}{r} \\
&= -\frac{1}{2}\left(A'' + A'^2\right)e^{A} - \frac{1}{2}\ddot{N} + \frac{2}{r^2} + \frac{\dot{N}\dot{A}}{4} - \frac{N'A'}{4}e^{N} - \frac{A'^2}{4}e^{A} \\
&+ \frac{\dot{A}}{r} - \frac{\dot{N}^2}{4} + \frac{A'^2}{4}e^{A} + \frac{A'^2}{4}e^{A} - \frac{2}{r^2}.
\end{aligned} \tag{C.26}
$$

$$
R_{rr} = \frac{e^{A}}{2}\left(-A'' - \frac{N'A'}{2} + \frac{A'^2}{2}\right) - \frac{\ddot{N}}{2} - \frac{\dot{N}^2}{4} + \frac{\dot{N}\dot{A}}{4} + \frac{\dot{A}}{r}. \tag{C.27}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{\theta\theta} &= \Gamma^{r}_{\theta\theta,r} - \Gamma^{\phi}_{\theta\phi,\theta} + \Gamma^{t}_{rt}\Gamma^{r}_{\theta\theta} + \Gamma^{r}_{rr}\Gamma^{r}_{\theta\theta} - \Gamma^{\phi}_{\phi\theta}\Gamma^{\phi}_{\phi\theta} \\
&= \partial_r(-\frac{r}{A^2}) - \partial_\theta(\cot\theta) + \frac{\dot{N}}{N}(-\frac{r}{A^2}) + \frac{\dot{A}}{A}(-\frac{r}{A^2}) - \cot^2\theta \\
&= \left(\frac{-e^{A} + 2\dot{A}eAr}{e2A}\right) - \left(\frac{-\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right) \\
&+ \frac{\dot{N}}{2}(-\frac{r}{e^{A}}) + \frac{\dot{A}}{A}(-\frac{r}{e^{A}}) - \cot^2\theta.
\end{aligned} \tag{C.28}
$$

$$
R_{\theta\theta} = 1 - e^{-A} - \frac{e^{-A}r^2}{2}\left(\frac{\dot{N}}{r} - \frac{\dot{A}}{r}\right). \tag{C.29}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{\phi\phi} &= \Gamma^{r}_{\phi\phi,r} + \Gamma^{\theta}_{\phi\phi,\theta} + \Gamma^{t}_{tr}\Gamma^{r}_{\phi\phi} + \Gamma^{r}_{rr}\Gamma^{r}_{\phi\phi} + \Gamma^{\theta}_{r\theta}\Gamma^{r}_{\phi\phi} - \Gamma^{r}_{\phi\phi}\Gamma^{\phi}_{r\phi} - \Gamma^{\theta}_{\phi\phi}\Gamma^{\phi}_{\theta\phi} \\
&= \partial_r(-\frac{r\sin^{\theta}}{e^{A}}) + \partial_\theta(-\cos\theta\sin\theta) + \frac{\dot{N}}{2}(-\frac{r\sin^2\theta}{e^{A}}) \\
&+ \frac{\dot{A}}{2}(-\frac{r\sin^2\theta}{e^{A}}) + \frac{\sin^2\theta}{e^{A}} + \cos^2\theta \\
&= \left(\frac{r\sin^2\theta\dot{A}e^{A} - \sin^2\theta}{e^{2A}}\right) + \left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\right) - \frac{\dot{N}}{2}(\frac{r\sin^2\theta}{e^{A}}) \\
&- \frac{\dot{A}}{2}(\frac{r\sin^2\theta}{e^{A}}) + \frac{\sin^2}{e^{A}} + \cos^{\theta}.
\end{aligned} \tag{C.30}
$$

$$
R_{\phi\phi} = \sin^2\theta - e^{-A}\sin^2\theta - \frac{e^{-A}r^2\sin^2\theta}{2}\left(-\frac{\dot{A}}{r} + \frac{\dot{N}}{r}\right). \tag{C.31}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{yy} &= -\Gamma^{t}_{yt,y} + \Gamma^{r}_{yr,y} - \Gamma^{t}_{ty}\Gamma^{t}_{ty} - \Gamma^{r}_{ry}\Gamma^{r}_{ry} \\
&= -\partial_y(\frac{1}{2}N') - \partial_y(\frac{1}{2}A') - (\frac{1}{2}N')^2 - (\frac{1}{2}A')^2.
\end{aligned} \tag{C.32}
$$

$$R_{yy} = -\frac{N''}{2} - \frac{A''}{2} - \frac{N'^2}{4} - \frac{A'^2}{4}. \tag{C.33}$$

$$\begin{aligned} R_{ry} &= \Gamma^r_{ry,r} - \Gamma^t_{rt,y} - \Gamma^r_{rr,y} + \Gamma^\theta_{r\theta}\Gamma^r_{ry} + \Gamma^\phi_{r\phi}\Gamma^r_{ry} + \Gamma^t_{tr}\Gamma^r_{ry} - \Gamma^t_{rt}\Gamma^t_{ty} \\ &= \partial_r(\frac{1}{2}A') - \partial_y(\frac{1}{2}\dot{N}) - \partial_y(\frac{\dot{A}}{2}) + (\frac{\dot{N}}{2})(\frac{A'}{2}) - (\frac{1}{2}\dot{N})(\frac{1}{2}N') + \frac{A'}{r}. \end{aligned} \tag{C.34}$$

$$R_{ry} = -\frac{\dot{N}}{4}(N' - A') + \frac{A'}{r} - \frac{\dot{N}'}{2}. \tag{C.35}$$

Le scalaire de Ricci

Le scalaire de Ricci, R, est donné par:

$$R = R_{tt}g^{tt} + R_{rr}g^{rr} + R_{\theta\theta}g^{\theta\theta} + R_{\phi\phi}g^{\phi\phi} + R_{yy}g^{yy}. \tag{C.36}$$

$$\begin{aligned} R &= \left(-N'' - A'' - \frac{N'^2}{2} - \frac{A'^2}{2} - \frac{N'A'}{2} + \frac{2}{r^2}\right) \\ &+ e^{-A}\left(-\ddot{N} - \frac{\dot{N}^2}{2} - 2\left(\frac{\dot{N}}{r} - \frac{\dot{A}}{r}\right) - \frac{2}{r^2}\right). \end{aligned} \tag{C.37}$$

En effet:

$$\begin{aligned} R = &-\frac{1}{e^N}\left[\frac{e^N}{2}\left(N'' + \frac{N'^2}{2} + \frac{N'A'}{2}\right) + e^{N-A}\left(\frac{\ddot{N}}{2} + \frac{\dot{N}^2}{4} - \frac{\dot{N}\dot{A}}{4} + \frac{\dot{N}}{r}\right)\right] \\ &+ \frac{1}{e^A}\left[\frac{e^A}{2}\left(-A'' - \frac{N'A'}{2} - \frac{A'^2}{2}\right) - \frac{\ddot{N}}{2} - \frac{\dot{N}^2}{4} + \frac{\dot{N}\dot{A}}{4} + \frac{\dot{A}}{r}\right] \\ &+ \frac{1}{r^2}\left[1 - e^{-A} - \frac{e^{-A}r^2}{2}\left(\frac{\dot{N}}{r} - \frac{\dot{A}}{r}\right)\right] \\ &+ \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left[\sin^2\theta - e^{-A}\sin^2\theta - \frac{e^{-A}r^2\sin^2\theta}{2}\left(\frac{\dot{N}}{r} - \frac{\dot{A}}{r}\right)\right] \\ &+ \left[-\frac{N''}{2} - \frac{A''}{2} - \frac{N'^2}{4} - \frac{A'^2}{4}\right]. \end{aligned} \tag{C.38}$$

Donc:

$$\begin{aligned} R &= \left(-N'' - A'' - \frac{N'^2}{2} - \frac{A'^2}{2} - \frac{N'A'}{2} + \frac{2}{r^2}\right) \\ &+ e^{-A}\left(-\ddot{N} - \frac{\dot{N}^2}{2} - 2\left(\frac{\dot{N}}{r} - \frac{\dot{A}}{r}\right) - \frac{2}{r^2}\right). \end{aligned} \tag{C.39}$$

Les tenseurs d'Einstein

En utilisant la formule suivante:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{C.40}$$

Les tenseurs d'Einstein, $G_{\mu\nu}$, sont donnés par:

$$\begin{aligned}
G_{tt} &= e^N \left(\frac{A''}{2} - \frac{A'^2}{4} + \frac{1}{r^2} \right) + e^{N-A} \left(\frac{\dot{A}}{r} - \frac{1}{r^2} \right). \\
G_{rr} &= e^A \left(\frac{N''}{2} + \frac{N'^2}{4} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{\dot{N}}{r} + \frac{1}{r^2}. \\
G_{\theta\theta} &= \frac{r^2}{2} \left(N'' + A'' + \frac{N'^2}{2} + \frac{N'A'}{2} + \frac{A'^2}{2} \right) + \frac{e^{-A} r^2}{2} \left(\ddot{N} + \frac{\dot{N}^2}{2} - \frac{\dot{N}\dot{A}}{2} + \frac{\dot{N}}{r} - \frac{\dot{A}}{r} \right). \\
G_{\phi\phi} &= \frac{r^2 \sin^2\theta}{2} \left(N'' + A'' + \frac{N'^2}{2} + \frac{N'A'}{2} + \frac{A'^2}{2} \right) + \frac{e^{-A} r^2 \sin^2\theta}{2} \left(\ddot{N} + \frac{\dot{N}^2}{2} - \frac{\dot{N}\dot{A}}{2} + \frac{\dot{N}}{r} - \frac{\dot{A}}{r} \right). \\
G_{yy} &= \frac{N'A'}{4} - \frac{1}{r^2} + e^{-A} \left(\frac{\ddot{N}}{2} + \frac{\dot{N}^2}{4} - \frac{\dot{N}\dot{A}}{4} + \frac{\dot{N}}{r} - \frac{\dot{A}}{r} + \frac{1}{r^2} \right). \\
G_{ry} &= -\frac{\dot{N}}{4}(N' - A') + \frac{A'}{r} - \frac{\dot{N}'}{2}.
\end{aligned} \tag{C.41}$$

En effet:

$$\begin{aligned}
G_{tt} = {} & \frac{e^N}{2} \left(N'' + \frac{N'^2}{2} + \frac{N'A'}{2} \right) + e^{N-A} \left(\frac{\ddot{N}}{2} + \frac{\dot{N}^2}{4} - \frac{\dot{N}\dot{A}}{4} + \frac{\dot{N}}{r} \right) \\
& + \frac{1}{2} e^N \left[\left(-N'' - A'' - \frac{N'^2}{2} - \frac{A'^2}{2} - \frac{N'A'}{2} + \frac{2}{r^2} \right) \right] \\
& + \frac{1}{2} e^N \left[e^{-A} \left(-\ddot{N} - \frac{\dot{N}^2}{2} - 2 \left(\frac{\dot{N}}{r} - \frac{\dot{A}}{r} \right) - \frac{2}{r^2} \right) \right].
\end{aligned} \tag{C.42}$$

$$G_{tt} = e^N \left(\frac{A''}{2} - \frac{A'^2}{4} + \frac{1}{r^2} \right) + e^{N-A} \left(\frac{\dot{A}}{r} - \frac{1}{r^2} \right). \tag{C.43}$$

$$\begin{aligned}
G_{rr} = {} & \frac{e^A}{2} \left(-A'' - \frac{N'A'}{2} - \frac{A'^2}{2} \right) - \frac{\ddot{N}}{2} - \frac{\dot{N}^2}{4} + \frac{\dot{N}\dot{A}}{4} + \frac{\dot{A}}{r} \\
& - \frac{1}{2} e^A \left[\left(-N'' - A'' - \frac{N'^2}{2} - \frac{A'^2}{2} - \frac{N'A'}{2} + \frac{2}{r^2} \right) \right] \\
& - \frac{1}{2} e^A \left[e^{-A} \left(-\ddot{N} - \frac{\dot{N}^2}{2} - 2 \left(\frac{\dot{N}}{r} - \frac{\dot{A}}{r} \right) - \frac{2}{r^2} \right) \right].
\end{aligned} \tag{C.44}$$

$$G_{rr} = e^{A}\left(\frac{N''}{2} + \frac{N'^2}{4} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{\dot{N}}{r} + \frac{1}{r^2}. \tag{C.45}$$

$$\begin{aligned} G_{\theta\theta} &= 1 - e^{-A} - \frac{e^{-A}r^2}{2}\left(\frac{\dot{N}}{r} - \frac{\dot{A}}{r}\right) \\ &- \frac{1}{2}r^2\left[\left(-N'' - A'' - \frac{N'^2}{2} - \frac{A'^2}{2} - \frac{N'A'}{2} + \frac{2}{r^2}\right)\right] \\ &- \frac{1}{2}r^2\left[e^{-A}\left(-\ddot{N} - \frac{\dot{N}^2}{2} - 2\left(\frac{\dot{N}}{r} - \frac{\dot{A}}{r}\right) - \frac{2}{r^2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{C.46}$$

$$\begin{aligned} G_{\theta\theta} &= \frac{r^2}{2}\left(N'' + A'' + \frac{N'^2}{2} + \frac{N'A'}{2} + \frac{A'^2}{2}\right) \\ &+ \frac{e^{-A}r^2}{2}\left(\ddot{N} + \frac{\dot{N}^2}{2} - \frac{\dot{N}\dot{A}}{2} + \frac{\dot{N}}{r} - \frac{\dot{A}}{r}\right). \end{aligned} \tag{C.47}$$

$$\begin{aligned} G_{\phi\phi} &= \sin^2\theta - e^{-A}\sin^2\theta - \frac{e^{-A}r^2\sin^2\theta}{2}\left(\frac{\dot{N}}{r} - \frac{\dot{A}}{r}\right) \\ &- \frac{1}{2}r^2\sin^2\theta\left[\left(-N'' - A'' - \frac{N'^2}{2} - \frac{A'^2}{2} - \frac{N'A'}{2} + \frac{2}{r^2}\right)\right] \\ &- \frac{1}{2}r^2\sin^2\theta\left[e^{-A}\left(-\ddot{N} - \frac{\dot{N}^2}{2} - 2\left(\frac{\dot{N}}{r} - \frac{\dot{A}}{r}\right) - \frac{2}{r^2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{C.48}$$

$$\begin{aligned} G_{\phi\phi} &= \frac{r^2\sin^2\theta}{2}\left(N'' + A'' + \frac{N'^2}{2} + \frac{N'A'}{2} + \frac{A'^2}{2}\right) \\ &+ \frac{e^{-A}r^2\sin^2\theta}{2}\left(\ddot{N} + \frac{\dot{N}^2}{2} - \frac{\dot{N}\dot{A}}{2} + \frac{\dot{N}}{r} - \frac{\dot{A}}{r}\right). \end{aligned} \tag{C.49}$$

$$\begin{aligned} G_{yy} &= -\frac{N''}{2} - \frac{A''}{2} - \frac{N'^2}{4} - \frac{A'^2}{4} \\ &- \frac{1}{2}\left[\left(-N'' - A'' - \frac{N'^2}{2} - \frac{A'^2}{2} - \frac{N'A'}{2} + \frac{2}{r^2}\right)\right] \\ &- \frac{1}{2}\left[e^{-A}\left(-\ddot{N} - \frac{\dot{N}^2}{2} - 2\left(\frac{\dot{N}}{r} - \frac{\dot{A}}{r}\right) - \frac{2}{r^2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{C.50}$$

$$G_{yy} = \frac{N'A'}{4} - \frac{1}{r^2} + e^{-A}\left(\frac{\ddot{N}}{2} + \frac{\dot{N}^2}{4} - \frac{\dot{N}\dot{A}}{4} + \frac{\dot{N}}{r} - \frac{\dot{A}}{r} + \frac{1}{r^2}\right). \tag{C.51}$$

$$G_{ry} = -\frac{\dot{N}}{4}(N' - A') + \frac{A'}{r} - \frac{\dot{N}'}{2}. \tag{C.52}$$

Symbôles de Christoffel

On prend maintenant l'autre formule de la métrique qui est donné par:

$$ds^2 = -N^2(r,y)dt^2 + A^2(r,y)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + dy^2 \tag{C.53}$$

On fait les mêmes étapes précédentes:

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma^t_{tt} = 0 & \Gamma^r_{tt} = \frac{N\dot{N}}{A^2} & \Gamma^y_{tt} = NN' \\
\Gamma^t_{tr} = \frac{\dot{N}}{N} & \Gamma^r_{tr} = 0 & \Gamma^y_{tr} = 0 \\
\Gamma^t_{ty} = \frac{N'}{N} & \Gamma^r_{ty} = 0 & \Gamma^y_{ty} = 0 \\
\Gamma^t_{rr} = 0 & \Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\gamma^{im}(\gamma_{mk,j} + \gamma_{mj,k} - \gamma_{jk,m}) & \Gamma^y_{rr} = -AA' \\
\Gamma^t_{ry} = 0 & \Gamma^r_{ry} = \frac{A'}{A} & \Gamma^y_{yr} = 0 \\
\Gamma^t_{yy} = 0 & \Gamma^r_{yy} = 0 & \Gamma^y_{yy} = 0
\end{array} \tag{C.54}$$

En effet:

1.

$$\begin{aligned}
\Gamma^t_{tt} &= \frac{1}{2}g^{tt}(g_{tt,t} + g_{tt,t} - g_{tt,t}) = \frac{1}{2}g^{tt}(g_{tt,t}) \\
&= \frac{1}{2}(-\frac{1}{N^2})(\partial_t(-N^2)) \\
\Gamma^t_{tt} &= 0.
\end{aligned} \tag{C.55}$$

2.

$$\begin{aligned}
\Gamma^t_{tr} &= \frac{1}{2}g^{tt}(g_{tt,r} + g_{tr,t} - g_{tr,t}) = \frac{1}{2}g^{tt}(g_{tt,r}) \\
&= \frac{1}{2}(-\frac{1}{N^2})(\partial_r(-N^2)) \\
&= \frac{1}{2}(-\frac{1}{N^2})(-2\dot{N}N) \\
\Gamma^t_{tr} &= \frac{\dot{N}}{N}.
\end{aligned} \tag{C.56}$$

3.

$$\begin{aligned}
\Gamma^t_{ty} &= \frac{1}{2}g^{tt}(g_{tt,y} + g_{ty,t} - g_{ty,t}) = \frac{1}{2}g^{tt}(g_{tt,y}) \\
&= \frac{1}{2}(-\frac{1}{N^2})(\partial_y(-N^2)) \\
&= \frac{1}{2}(-\frac{1}{N^2})(-2N'N) \\
\Gamma^t_{ty} &= \frac{N'}{N}.
\end{aligned} \tag{C.57}$$

4.

$$\Gamma^t_{rr} = \frac{1}{2}g^{tt}(g_{tr,r} + g_{tr,r} - g_{rr,t}) = \frac{1}{2}g^{tt}(-g_{rr,t})$$
$$\Gamma^t_{rr} = 0. \tag{C.58}$$

5.

$$\Gamma^t_{ry} = \frac{1}{2}g^{tt}(g_{tr,y} + g_{ty,r} - g_{ry,t})$$
$$\Gamma^t_{ry} = 0. \tag{C.59}$$

6.

$$\Gamma^t_{yy} = \frac{1}{2}g^{tt}(g_{ty,y} + g_{ty,y} - g_{yy,t}) = \frac{1}{2}g^{tt}(-g_{yy,t})$$
$$\Gamma^t_{yy} = 0. \tag{C.60}$$

7.

$$\begin{aligned}\Gamma^r_{tt} &= \frac{1}{2}g^{rr}(g_{rt,t} + g_{tr,t} - g_{tt,r}) = \frac{1}{2}g^{rr}(-g_{tt,r}) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{1}{A^2})(-\partial_r(-N^2)) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{1}{A^2})(2\dot{N}N) \\ \Gamma^r_{tt} &= \frac{\dot{N}N}{A^2}.\end{aligned} \tag{C.61}$$

8.

$$\Gamma^r_{tr} = \frac{1}{2}g^{rr}(g_{rr,t} + g_{rt,r} - g_{tr,r}) = \frac{1}{2}g^{rr}(g_{rr,t})$$
$$\Gamma^r_{tr} = 0. \tag{C.62}$$

9.

$$\Gamma^r_{ty} = \frac{1}{2}g^{rr}(g_{ry,t} + g_{tr,y} - g_{ty,r})$$
$$\Gamma^r_{ty} = 0. \tag{C.63}$$

10.

$$\begin{aligned}\Gamma^i_{jk} &= \frac{1}{2}g^{i\rho}\left[\partial_j g_{k\rho} + \partial_k g_{\rho j} - \partial_\rho g_{jk}\right] \\ &= \frac{1}{2}g^{im}\left[\partial_j g_{km} + \partial_k g_{mj} - \partial_m g_{jk}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}\gamma^{im}\right)\left[\partial_j(a^2\gamma_{km}) + \partial_k(a^2\gamma_{mj}) - \partial_m(a^2\gamma_{jk})\right] \\ \Gamma^i_{jk} &= \frac{1}{2}\gamma^{im}\left(\gamma_{km,j} + \gamma_{mj,k} - \gamma_{jk,m}\right).\end{aligned} \tag{C.64}$$

11.

$$\Gamma^r_{ry} = \frac{1}{2}g^{rr}(g_{ry,r} + g_{rr,y} - g_{ry,r}) = \frac{1}{2}g^{rr}(g_{rr,y})$$
$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{A^2})(\partial_y A^2) = \frac{1}{2}(\frac{1}{A^2})(2A^{'}A)$$
$$\Gamma^r_{ry} = \frac{A^{'}}{A}. \tag{C.65}$$

12.

$$\Gamma^r_{yy} = \frac{1}{2}g^{rr}(g_{ry,y} + g_{ry,y} - g_{yy,r}) = \frac{1}{2}(-g_{yy,r})$$
$$\Gamma^r_{yy} = 0. \tag{C.66}$$

13.

$$\Gamma^y_{tt} = \frac{1}{2}g^{yy}(g_{yt,t} + g_{ty,t} - g_{tt,y}) = \frac{1}{2}g^{yy}(-g_{tt,y})$$
$$= \frac{1}{2}(-\partial_y(-N^2)) = \frac{1}{2}(2N^{'}N)$$
$$\Gamma^y_{tt} = N^{'}N. \tag{C.67}$$

14.

$$\Gamma^y_{tr} = \frac{1}{2}g^{yy}(g_{yr,t} + g_{yt,r} - g_{tr,y})$$
$$\Gamma^y_{tr} = 0. \tag{C.68}$$

15.

$$\Gamma^y_{ty} = \frac{1}{2}g^{yy}(g_{yy,t} + g_{yt,t} - g_{ty,y})$$
$$\Gamma^y_{ty} = 0. \tag{C.69}$$

16.

$$\Gamma^y_{rr} = \frac{1}{2}g^{yy}(g_{yr,r} + g_{ry,r} - g_{rr,y}) = \frac{1}{2}g^{yy}(-g_{rr,y})$$
$$= \frac{1}{2}(-\partial_y(A^2))$$
$$\Gamma^y_{rr} = -A^{'}A. \tag{C.70}$$

17.

$$\Gamma^y_{yr} = \frac{1}{2}g^{yy}(g_{yy,r} + g_{yr,y} - g_{ry,y})$$
$$\Gamma^y_{yr} = 0. \tag{C.71}$$

18.

$$\Gamma^y_{yy} = \frac{1}{2}g^{yy}(g_{yy,y} + g_{yy,y} - g_{yy,y}) = \frac{1}{2}g^{yy}(g_{yy,y})$$
$$\Gamma^y_{yy} = 0. \tag{C.72}$$

Le Tenseur de Ricci

Les tenseurs de Ricci sont donnés par:

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= N^2\left(\frac{N''}{N} + \frac{N'A'}{NA} + \frac{\ddot{N}}{NA^2} - \frac{\dot{N}\dot{A}}{NA^3} + \frac{2\dot{N}}{rNA^2}\right).\\
R_{rr} &= -A^2\left(\frac{A''}{A} + \frac{N'A'}{NA} + \frac{\ddot{N}}{NA^2} - \frac{\dot{N}\dot{A}}{NA^3} - \frac{2\dot{A}}{rA^3}\right).\\
R_{\theta\theta} &= 1 - \frac{1}{A^2} - \frac{r}{A^2}\left(\frac{\dot{N}}{N} - \frac{\dot{A}}{A}\right).\\
R_{\phi\phi} &= \sin^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{A^2} - \frac{r\sin^2\theta}{A^2}\left(\frac{\dot{N}}{N} - \frac{\dot{A}}{A}\right).\\
R_{yy} &= -\frac{N''}{N} - \frac{A''}{A}.\\
R_{ry} &= \frac{2A'}{rA} + \frac{\dot{N}A'}{NA} - \frac{\dot{N}'}{N}.
\end{aligned} \tag{C.73}$$

En effet:

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= \Gamma^r_{tt,r} + \Gamma^y_{tt,y} + \Gamma^r_{rr}\Gamma^r_{tt} + \Gamma^r_{yr}\Gamma^y_{tt} + \Gamma^\theta_{r\theta}\Gamma^r_{tt} + \Gamma^\phi_{r\phi}\Gamma^r_{tt} - \Gamma^r_{tt}\Gamma^t_{rt} - \Gamma^y_{tt}\Gamma^t_{yt}\\
&= -\partial_r\left(\frac{\dot{N}N}{A^2}\right) - \partial_y\left(N'N\right) + \frac{\dot{A}}{A}\left(\frac{\dot{N}N}{A^2}\right) + \frac{A'}{A}\left(N'N\right)\\
&+ \frac{2}{r}\left(\frac{\dot{N}N}{A^2}\right) - \frac{\dot{N}}{N}\left(\frac{\dot{N}N}{A^2}\right) - \frac{N'}{N}NN'\\
&= \left(\frac{\left(\dot{N}^2 + \ddot{N}N\right)A^2 - 2A\dot{A}\left(\dot{N}N\right)}{A^4}\right) + \left(N''N + N'^2\right) + \frac{\dot{A}}{A^3}\left(\dot{N}N\right)\\
&+ \frac{A'}{A}\left(N'N\right) + \frac{2}{r}\left(\frac{\dot{N}N}{A^2}\right) - \frac{\dot{N}^2}{A^2}.
\end{aligned} \tag{C.74}$$

$$R_{tt} = N^2\left(\frac{N''}{N} + \frac{N'A'}{NA} + \frac{\ddot{N}}{NA^2} - \frac{\dot{N}\dot{A}}{NA^3} + \frac{2\dot{N}}{rNA^2}\right). \tag{C.75}$$

$$
\begin{aligned}
R_{rr} &= \Gamma^{y}_{rr,y} - \Gamma^{t}_{rt,r} - \Gamma^{\theta}_{r\theta,r} - \Gamma^{\phi}_{r\phi,r} + \Gamma^{t}_{rt}\Gamma^{r}_{rr} + \Gamma^{\theta}_{r\theta}\Gamma^{r}_{rr}\Gamma^{\phi}_{r\phi}\Gamma^{r}_{rr} \\
&- \Gamma^{y}_{ry}\Gamma^{r}_{ry} - \Gamma^{\theta}_{\theta r}\Gamma^{\theta}_{\theta r} - \Gamma^{\phi}_{r\phi}\Gamma^{\phi}_{r\phi} \\
&= \partial_y\left(-AA^{'}\right) - \partial_r\left(\frac{\dot{N}}{N}\right) - 2\partial_r\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\dot{N}}{N}\left(\frac{\dot{A}}{A}\right) \\
&+ \frac{2}{r}\left(\frac{\dot{A}}{A}\right) - \left(\frac{\dot{N}}{N}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{r}\right)^2 \\
&= -\left(A^{''}A + A^{'2}\right) - \left(\frac{\ddot{N}N - \dot{N}^2}{N^2}\right) - 2\left(-\frac{1}{r}\right) + \frac{\dot{A}\dot{N}}{AN} - \frac{N^{'}}{N}\left(AA^{'}\right) \\
&- A^{'2} + \frac{2}{r}\left(\frac{\dot{A}}{A}\right) - \frac{\dot{N}^2}{N^2} + 2A^{'2} - \frac{2}{r^2}.
\end{aligned} \tag{C.76}
$$

$$
R_{rr} = -A^2\left(\frac{A^{''}}{A} + \frac{N^{'}A^{'}}{NA} + \frac{\ddot{N}}{NA^2} - \frac{\dot{N}\dot{A}}{NA^3} - \frac{2\dot{A}}{rA^3}\right). \tag{C.77}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{\theta\theta} &= \Gamma^{r}_{\theta\theta,r} - \Gamma^{\phi}_{\theta\phi,\theta} + \Gamma^{t}_{rt}\Gamma^{r}_{\theta\theta} + \Gamma^{r}_{rr}\Gamma^{r}_{\theta\theta} - \Gamma^{\phi}_{\phi\theta}\Gamma^{\phi}_{\phi\theta} \\
&= \partial_r\left(-\frac{r}{A^2} - \partial_\theta\left(\cot\theta\right)\right) + \frac{\dot{N}}{N}\left(-\frac{r}{A^2}\right) + \frac{\dot{A}}{A}\left(-\frac{r}{A^2}\right) - \cot^2\theta \\
&= \left(\frac{-A^2 + 2\dot{A}Ar}{A^4}\right) - \left(\frac{-\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\sin^2}\right) + \frac{\dot{N}}{N}\left(-\frac{r}{A}\right) \\
&+ \frac{\dot{A}}{A}\left(-\frac{r}{A^2}\right) - \cot^2\theta.
\end{aligned} \tag{C.78}
$$

$$
R_{\theta\theta} = 1 - \frac{1}{A^2} - \frac{r}{A^2}\left(\frac{\dot{N}}{N} - \frac{\dot{A}}{A}\right). \tag{C.79}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{\phi\phi} &= \Gamma^{r}_{\phi\phi,r} + \Gamma^{\theta}_{\phi\phi,\theta} + \Gamma^{t}_{tr}\Gamma^{r}_{\phi\phi} + \Gamma^{r}_{rr}\Gamma^{r}_{\phi\phi} - \Gamma^{\theta}_{\phi\phi}\Gamma^{\phi}_{\theta\phi} \\
&= \partial_r\left(-\frac{r\sin^2\theta}{A^2}\right) + \partial_\theta\left(-\cos\theta\sin\theta\right) + \frac{\dot{N}}{N}\left(-\frac{r\sin^2\theta}{A^2}\right) \\
&+ \frac{\dot{A}}{A}\left(-\frac{r\sin^2\theta}{A^2}\right) - \left(-\cos\theta\sin\theta\right)\left(\cot\theta\right) \\
&= \left(\frac{-A^2\sin^2\theta + 2A\dot{A}r\sin^2\theta}{A^4}\right) + \left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\right) + \frac{\dot{N}}{N}\left(-\frac{r\sin^2\theta}{A^2}\right) \\
&+ \frac{\dot{A}}{A}\left(-\frac{r\sin^2\theta}{A^2}\right) + \cos^2\theta.
\end{aligned} \tag{C.80}
$$

$$
R_{\phi\phi} = \sin^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{A^2} - \frac{r\sin^2\theta}{A^2}\left(\frac{\dot{N}}{N} - \frac{\dot{A}}{A}\right). \tag{C.81}
$$

$$\begin{aligned}
R_{yy} &= -\Gamma^t_{yt,y} + \Gamma^r_{yr,y} - \Gamma^t_{ty}\Gamma^t_{ty} - \Gamma^r_{ry}\Gamma^r_{ry} \\
&= -\partial_y\left(\frac{N'}{N}\right) - \partial_y\left(\frac{A'}{A}\right) - \left(\frac{N'}{N}\right)^2 - \left(\frac{A'}{A}\right)^2 \\
&= -\left(\frac{N''N - N'^2}{N^2}\right) - \left(\frac{A''A - A'^2}{A^2}\right) - \left(\frac{N'}{N}\right)^2 - \left(\frac{A'}{A}\right)^2
\end{aligned} \tag{C.82}$$

$$R_{yy} = -\frac{N''}{N} - \frac{A''}{A}. \tag{C.83}$$

$$\begin{aligned}
R_{ry} &= -\Gamma^t_{rt,y} + \Gamma^t_{rt}\Gamma^r_{ry} + \Gamma^r_{rr}\Gamma^r_{ry} + \Gamma^\theta_{r\theta}\Gamma^r_{ry} + \Gamma^\phi_{r\phi}\Gamma^r_{ry} - \Gamma^t_{tr}\Gamma^t_{ty} - \Gamma^r_{rr}\Gamma^r_{ry} \\
&= -\partial_y\left(\frac{\dot N}{N}\right) + \frac{2}{r}\left(\frac{A'}{A}\right) + \left(\frac{\dot N}{N}\right)\left(\frac{A'}{A}\right) - \left(\frac{\dot A}{A}\frac{A'}{A}\right) - \frac{\dot N}{N}\left(\frac{N'}{N}\right) \\
&\quad - \frac{\dot A}{A}\left(\frac{A'}{A}\right).
\end{aligned} \tag{C.84}$$

$$R_{ry} = \frac{2A'}{rA} + \frac{\dot N A'}{NA} - \frac{\dot N'}{N}. \tag{C.85}$$

Le scalaire de Ricci

Le scalaire de Ricci est donné par:

$$\begin{aligned}
R = &-\frac{2N''}{N} - \frac{2A''}{A} - \frac{2N'A'}{NA} - \frac{2\ddot N}{NA^2} + \frac{2\dot N\dot A}{NA^3} - \frac{4\dot N}{rNA^2} + \frac{4\dot A}{rA^3} \\
&+ \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2A^2}.
\end{aligned} \tag{C.86}$$

En effet:

$$\begin{aligned}
R = &-\frac{1}{N^2}\left[N^2\left(\frac{N''}{N} + \frac{N'A'}{NA} + \frac{\ddot N}{NA^2} - \frac{\dot N\dot A}{NA^3} + \frac{2\dot N}{rNA^2}\right)\right] \\
&+ \frac{1}{A^2}\left[-A^2\left(\frac{A''}{A} + \frac{N'A'}{NA} + \frac{\ddot N}{NA^2} - \frac{\dot N\dot A}{NA^3} - \frac{2\dot A}{rA^3}\right)\right] \\
&+ \frac{1}{r^2}\left[1 - \frac{1}{A^2} - \frac{r}{A^2}\left(\frac{\dot N}{N} - \frac{\dot A}{A}\right)\right] \\
&+ \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left[\sin^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{A^2} - \frac{r\sin^2\theta}{A^2}\left(\frac{\dot N}{N} - \frac{\dot A}{A}\right)\right] \\
&+ \left[-\frac{N''}{N} - \frac{A''}{A}\right].
\end{aligned} \tag{C.87}$$

$$\begin{aligned}
R = &-\frac{2N''}{N} - \frac{2A''}{A} - \frac{2N'A'}{NA} - \frac{2\ddot N}{NA^2} + \frac{2\dot N\dot A}{NA^3} - \frac{4\dot N}{rNA^2} + \frac{4\dot A}{rA^3} \\
&+ \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2A^2}.
\end{aligned} \tag{C.88}$$

Les tenseurs d'Einstein

Les tenseurs d'Einstein sont donnés par:

$$\begin{aligned}
G_{tt} &= N^2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^2A^2}-\frac{A''}{A}+\frac{2\dot{A}}{rA^3}\right).\\
G_{rr} &= -A^2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^2A^2}-\frac{N''}{N}-\frac{2\dot{N}}{rNA^2}\right).\\
G_{\theta\theta} &= r^2\left(\frac{N''}{N}+\frac{A''}{A}+\frac{N'A'}{NA}+\frac{\ddot{N}}{NA^2}-\frac{\dot{N}\dot{A}}{NA^3}+\frac{\dot{N}}{rNA^2}-\frac{\dot{A}}{rA^3}\right).\\
G_{\phi\phi} &= r^2\sin^2\theta\left(\frac{N''}{N}+\frac{A''}{A}+\frac{N'A'}{NA}+\frac{\ddot{N}}{NA^2}-\frac{\dot{N}\dot{A}}{NA^3}+\frac{\dot{N}}{rNA^2}-\frac{\dot{A}}{rA^3}\right).\\
G_{yy} &= -\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^2A^2}+\frac{N'A'}{NA}+\frac{\ddot{N}}{NA^2}-\frac{\dot{N}\dot{A}}{NA^3}+\frac{2\dot{N}}{rNA^2}-\frac{2\dot{A}}{rA^3}.\\
G_{ry} &= \frac{2A'}{rA}+\frac{\dot{N}A'}{NA}-\frac{\dot{N}'}{N}.
\end{aligned}\tag{C.89}$$

En effet:

$$\begin{aligned}
G_{tt} = N^2&\left(\frac{N''}{N}+\frac{N'A'}{NA}+\frac{\ddot{N}}{NA^2}-\frac{\dot{N}\dot{A}}{NA^3}+\frac{2\dot{N}}{rNA^2}\right)\\
&+\frac{1}{2}N^2\left(-\frac{2N''}{N}-\frac{2A''}{A}-\frac{2N'A'}{NA}-\frac{2\ddot{N}}{NA^2}+\frac{2\dot{N}\dot{A}}{NA^3}-\frac{4\dot{N}}{rNA^2}\right)\\
&+\frac{1}{2}N^2\left(\frac{4\dot{A}}{rA^3}+\frac{2}{r^2}-\frac{2}{r^2A^2}\right).
\end{aligned}\tag{C.90}$$

$$G_{tt} = N^2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^2A^2}-\frac{A''}{A}+\frac{2\dot{A}}{rA^3}\right).\tag{C.91}$$

$$\begin{aligned}
G_{rr} = -A^2&\left(\frac{A''}{A}+\frac{N'A'}{NA}+\frac{\ddot{N}}{NA^2}-\frac{\dot{N}\dot{A}}{NA^3}-\frac{2\dot{A}}{rA^3}\right)\\
&-\frac{1}{2}A^2\left(-\frac{2N''}{N}-\frac{2A''}{A}-\frac{2N'A'}{NA}-\frac{2\ddot{N}}{NA^2}+\frac{2\dot{N}\dot{A}}{NA^3}-\frac{4\dot{N}}{rNA^2}\right)\\
&-\frac{1}{2}A^2\left(\frac{4\dot{A}}{rA^3}+\frac{2}{r^2}-\frac{2}{r^2A^2}\right).
\end{aligned}\tag{C.92}$$

$$G_{rr} = -A^2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^2A^2}-\frac{N''}{N}-\frac{2\dot{N}}{rNA^2}\right).\tag{C.93}$$

$$G_{\theta\theta} = 1 - \frac{1}{A^2} - \frac{r}{A^2}\left(\frac{\dot{N}}{N} - \frac{\dot{A}}{A}\right)$$
$$- \frac{1}{2}r^2\left(-\frac{2N''}{N} - \frac{2A''}{A} - \frac{2N'A'}{NA} - \frac{2\ddot{N}}{NA^2} + \frac{2\dot{N}\dot{A}}{NA^3} - \frac{4\dot{N}}{rNA^2}\right)$$
$$- \frac{1}{2}r^2\left(\frac{4\dot{A}}{rA^3} + \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2A^2}\right). \tag{C.94}$$

$$G_{\theta\theta} = r^2\left(\frac{N''}{N} + \frac{A''}{A} + \frac{N'A'}{NA} + \frac{\ddot{N}}{NA^2} - \frac{\dot{N}\dot{A}}{NA^3} + \frac{\dot{N}}{rNA^2} - \frac{\dot{A}}{rA^3}\right). \tag{C.95}$$

$$G_{\phi\phi} = \sin^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{A^2} - \frac{r\sin^2\theta}{A^2}\left(\frac{\dot{N}}{N} - \frac{\dot{A}}{A}\right)$$
$$- \frac{1}{2}r^2\sin^2\theta\left(-\frac{2N''}{N} - \frac{2A''}{A} - \frac{2N'A'}{NA} - \frac{2\ddot{N}}{NA^2} + \frac{2\dot{N}\dot{A}}{NA^3} - \frac{4\dot{N}}{rNA^2}\right)$$
$$- \frac{1}{2}r^2\sin^2\theta\left(\frac{4\dot{A}}{rA^3} + \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2A^2}\right). \tag{C.96}$$

$$G_{\phi\phi} = r^2\sin^2\theta\left(\frac{N''}{N} + \frac{A''}{A} + \frac{N'A'}{NA} + \frac{\ddot{N}}{NA^2} - \frac{\dot{N}\dot{A}}{NA^3} + \frac{\dot{N}}{rNA^2} - \frac{\dot{A}}{rA^3}\right). \tag{C.97}$$

$$G_{yy} = -\frac{N''}{N} - \frac{A''}{A} - \frac{1}{2}\left(-\frac{2N''}{N} - \frac{2A''}{A} - \frac{2N'A'}{NA} - \frac{2\ddot{N}}{NA^2}\right)$$
$$- \frac{1}{2}\left(\frac{2\dot{N}\dot{A}}{NA^3} - \frac{4\dot{N}}{rNA^2} + \frac{4\dot{A}}{rA^3} + \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2A^2}\right). \tag{C.98}$$

$$G_{yy} = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2A^2} + \frac{N'A'}{NA} + \frac{\ddot{N}}{NA^2} - \frac{\dot{N}\dot{A}}{NA^3} + \frac{2\dot{N}}{rNA^2} - \frac{2\dot{A}}{rA^3}. \tag{C.99}$$

$$G_{ry} = \frac{2A'}{rA} + \frac{\dot{N}A'}{NA} - \frac{\dot{N}'}{N}. \tag{C.100}$$

Bibliographie

[1] E.J.Copeland, M.Sami and S.Tsujikawa, *Dynamics of dark energy* Int. J. Mod .Phys .D 15:1753-1936(2006)[hep-th/0603057v3].

[2] G.Davli, G. Gabadadze and M.Porrati, *4D gravity on a brane in 5D Minkowski space* Phys. Lett.B 485:208-214(2000) [hep-th/0005016v2].

[3] Rébecca Breton, *Théorie de Kaluza-Klein*, Université Laval, Québec, (5 avril 2017)

[4] Philippe Brax and Carsten van de Bruck, *Cosmology and Brane Worlds: A Review*,Unversitu of Oxford.

[5] Roy Maartens, Kazuya Koyama, *Brane-World Gravity*, institute of Cosmology and Gravitation, (september,2010)

[6] L.Randall and R.Sundrum, *A large mass hierarchy from a small extra dimension* phys. Rev. Lett 83:3370-3373 (1999) [hep-ph/9905221]

[7] David Langois, *Brane Cosmology: an introduction*,Institut d'astrophysique, paris (February 1,2008)

[8] E. Elbaz, M. Novello, *Cosmologie*, ellipses, (1992).

[9] J. C. Boudenot, *Électromagnétisme et gravitation relativistes*, ellipses, (1989).

[10] A. Barrau, J. Grain, *Relativité générale*, Dunod, (2011).

[11] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology, principes and applications of the general theory of relativity*, John Wiley and Sons, (1972).

[12] Sean M.Carroll, *introduction to general relativity: spacetime and géométrie* Adsison-wesley, ISBN 0-8053-8732-3.

[13] Thornton, Rex, *Physique moderne*, De boeck, (2009).

[14] S. Capozziello, V. Faraoni, *Beyond Einstein Gravity, A Survey of Gravitational Theories for Cosmology and Astrophysics*, Fundamental Theories of Physics, Volum 170, (2010).

[15] J. Haldik, *Introduction à la relativité générale*, ellipses, (2006).

[16] A. Einstein, *La Relativité: La théorie de la relativité restreinte et générale, La relativité et le problème de l'espace* , Petite Bibliothèque Payot, (1956).

[17] R. M. Wald, *General relativity*, The University of Chicago Press, Chicago and London, (1984).

[18] M.P.Hobson.G.Efsatathiou and A.N.Lasenbey, *General Relativity: An introduction for physicits.*, Cambridge University Press, (2006).

[19] C.Deffayet, *Cosmology on a brane in Minkowski bulk.* phys. Lett. B 502:199-208(2001)[hep-th/0010186v2].

[20] G.Davli, G. Gabadadze and M.Shifman, *Diluting the cosmological constant in infinit volume extra dimensions.* phys, Rev. D 67:044020(2003) [hep-th/0202174v2].

[21] P.Binetruy, C.Deffyet,U.Ellwanger and D.Langlois, *Brane cosmological evolution in a bulk with cosmological constante.* Phys. Lett. B 477:285-291(2000) [hep-th/9910219v2].

[22] C. Deffayet, G. Dvali and G. Gabadadze, *Accelerated universe from gravity leaking to extra dimensions.* Phys. Rev D 65:044023 (2002) [hep-ph/0105068v1].

[23] V. Sahni and Y. Shtanov, *Braneworld models of dark energy.* JCAP 0311 014(2003) [astro-ph/0202346v3].

[24] C. de Rham, S. Hofmann, J Khoury and A. J. Tolley, *Cascading gravity and degravity.* JCAP 02 011 52003) [doi:10.1088/1475-7516/2008/20/011]

[25] N. Agarwal, R.Bean, J. Khoury and M. Trodden, *Cascading cosmology.* phys. Rev. D 81:084020 (2010)[doi:10.1103/physRevD.81.084020]