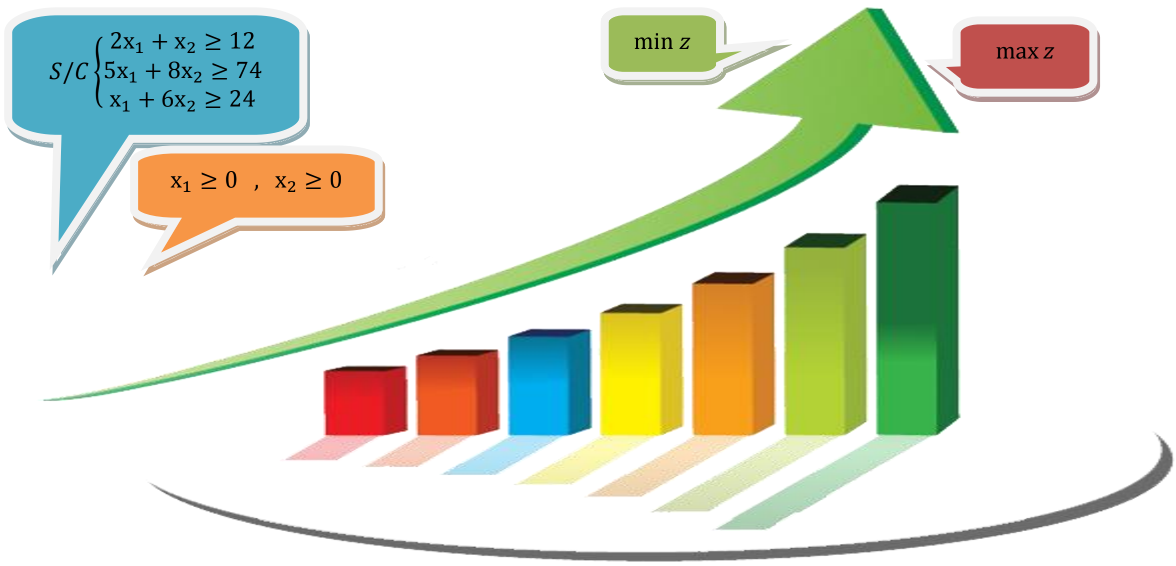
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة أكلي محند أولحاج
- البويرة -
كلية العلوم الإقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Akli Mohand Oulhadj - Bouira -
Tasdawit Akli Muḥend Ulḥağ - Tubirett -
Faculté des Sciences Economiques, Commerciales et des Sciences de Gestion

مطبوعة تحت عنوان:

محاضرات وتمارين في مقياس رياضيات المؤسسة.



موجهة لـ: طلبة السنة الثانية علوم اقتصادية

قسم العلوم الاقتصادية.

من إعداد الأستاذة :
حمادي خديجة

السنة الجامعية 2017 –2018

فهرس المحتويات

المقدمة

رياضيات المؤسسة هي فرع من فروع الرياضيات التطبيقية، تستخدم منهجية بحوث العمليات وأساليبها في حل المشكلات واتخاذ القرارات الإدارية، تتعرض مادة بحوث العمليات للأساليب الكمية المستخدمة في اتخاذ القرارات، حيث تم في السنوات الأخيرة تطوير العديد من الأساليب الكمية الجديدة والهامة بهدف المساعدة في عملية اتخاذ القرار، وسيكون التركيز في هذه المطبوعة على توضيح كيفية استخدام هذه الأساليب من أجل تحسين عملية اتخاذ القرار.

ولبحوث العمليات تطبيقات في الهندسة والعلوم الاقتصادية والإدارية والتسويقية، وهي تستخدم طرق النمذجة الرياضية والتحليل الإحصائي للوصول للحل الأمثل للمشكلات المختلفة في حدود الإمكانيات المتاحة، وذلك بناء على بيانات تفصيلية ودراسة دقيقة للمخرجات وتقدير المخاطر لكل البدائل المتاحة، أي تقوم بالتمثيل الرياضي لمشاكل عملية اتخاذ القرار وإيجاد طرق حل لهذه النماذج الرياضية.

ونظرا لتنوع وكثرة تطبيقاتها، تتقاطع بحوث العمليات مع مجالات أخرى متعددة مثل الهندسة الصناعية، وإدارة العمليات، وإدارة المواصلات وهي لا تعالج نفس الموضوعات، إلا أنها تبحث كلها في الحل الأمثل حسب نوع وطبيعة المسائل، وعادة ما يكمن الهدف في الحل الأمثل المنشود هو الحصول على أقل تكلفة ممكنة أو أكبر ربح ممكن.

تقوم المؤسسات المختلفة بتطبيق بحوث العمليات لحل الكثير من المشاكل التي تواجهها ومنها على سبيل المثال المشاكل المتعلقة بالمخزون السلعي، والمشاكل المتعلقة بتخصيص الموارد والتكاليف، والمشاكل المتعلقة بإحلال الآلات أو معدات الإنتاج، الجدولة...الخ، وأصبحت أساليب بحوث العمليات التي تتناول هذه المشاكل نماذج معيارية، الأمر الذي أدى إلي تشجيع العديد من المؤسسات بما فيها الصغيرة لأن تستفيد من هذه النماذج في حل العديد من المشاكل التي تواجهها دون أن تستثمر أموالا كبيرة في البحوث والدراسات.
هذا، وقد ساعد على انتشار أساليب بحوث العمليات في التطبيقات العملية عدة عوامل منها التطور الهائل والسريع في الحاسبات الآلية ونظم وبرامج التشغيل، وزيادة حدة المنافسة بين مؤسسات الأعمال مما جعلها تلجأ إلى استخدام الطرق والأساليب العلمية التي تساعدها على تقديم منتجاتها أو خدماتها بالجودة العالية والتكلفة المناسبة.

ونظرا للأهمية المشار إليها لأساليب بحوث العمليات في حل العديد من المشاكل التي تواجه منشآت الأعمال، فإنه يتعين الإلمام إلماما كافيا بهذه الأساليب وكيفية تطبيقها والاستفادة منها في تحليل وتفسير البيانات المحاسبية أو المالية وتقديمها للإدارة بالشكل الذي يساعدها في ترشيد القرارات الإدارية المختلفة حتى لا تكون النتائج سلبية لاستخدام بحوث العمليات في الواقع العملي، ومن هذا المنطلق تقدم هذه المطبوعة شرحا مبسطا لبعض أساليب بحوث العمليات بطريقة تمكن الطالب من فهم كل أسلوب ومعرفة كيفية استخدامه، دون الخوض في الإثباتات الرياضية المتعلقة بتلك الأساليب، على اعتبار أن هدفنا الأساسي ينصب على تدريب الطالب علي كيفية تطبيق هذه الأساليب والاستفادة منها في المجالات المختلفة.

تحتوي هذه المطبوعة على المحاور التالية:

المحور الأول:البرمجة الخطية
المحور الثاني: طرق حل البرنامج الخطي
المحور الثالث: الثنائية
المحور الرابع: تحليل الحساسية
المحور الخامس: مشكل النقل

المحور الأول

البرمـــجة الخطيـــة

المحور الأول: البرمجة الخطية.

تمهيد:

تقدمت وسائل التحليل الرياضي للمشاكل الإدارية والاقتصادية تقدما كبيرا، وتعتبر البرمجة الخطية إحدى هذه الوسائل وقد استخدمت كلمة برمجة كأداة تهدف إلى استغلال الموارد المتاحة للمؤسسة من قوة عاملة، مواد أولية ..الخ لتحقيق أكبر عائد ممكن، وقد زاد تطبيقها في الآونة الأخيرة نظرا للتقدم التكنولوجي الذي ساعد على تطوير الحاسبات الالكترونية المستخدمة في حل مشاكل البرمجة.

استخدمت البرمجة الخطية في حل العديد من المشاكل الاقتصادية سواء كانت إنتاجية أو تمويلية أو تسويقية أو إدارية، ففي الأولى تساعد البرمجة الخطية في حل مشكلات تخصيص الموارد النادرة بين الاستخدامات البديلة بحيث يتحقق من هذا التوزيع الحد الأقصى من الكفاءة، كما تمكن البرمجة المؤسسة من جدولة الإنتاج بين فروعها بحيث يحقق أقصى عائد ممكن، وتساهم البرمجة الخطية في تحديد أفضل تشكيلة للإنتاج بحيث تحقق الإدارة أقل كلفة ممكنة أو أقصى دخل ممكن.

كما تستخدم البرمجة الخطية في اتخاذ القرارات المتعلقة بالوظائف الرئيسية للإدارة كالتخطيط والتنظيم والرقابة، وتساعد البرمجة الخطية في حل مشاكل النقل والتوزيع حيث تستخدم للوصول إلى أقل كلفة عند نقل وتوزيع الإنتاج من مناطق معينة إلى مناطق أخرى، فضلا عن ذلك يمكن استخدام البرمجة الخطية في تنفيذ وتخطيط المشاريع الاقتصادية والاجتماعية.

سيتم التعرف في هذا المحور على مفهوم البرمجة الخطية وكيفية بناء نماذج البرمجة الخطية بأسلوب مبسط، حسب الهدف المحدد سواء كانت المشكلة تعظيم الأرباح أو تقليل التكاليف.

أولا: تعريف البرمجة الخطية:

تعرف البرمجة الخطية بأنها أسلوب أو طريقة رياضية علمية تهتم بمعالجة مشكلة تخصيص موارد أو طاقات محدودة لتحقيق هدف معين، ويعبر عن هذا الهدف بدالة خطية تسمى دالة الهدف، وغالبا ما تكون دالة ربح أو

دالة كلفة أو دالة طاقة إنتاجية وغيرها، أما الموارد المحددة فتعبر عنها مجموعة من المعادلات الخطية والمتراجحات التي تمثل مستلزمات العملية الإنتاجية[1].

إن مصطلح البرمجة يشير إلى استخدام الأسلوب المنطقي في تحليل المشكلة وعلاجها، في حين أن مصطلح الخطية يعني أن هناك علاقات ثابتة بين المتغيرات الأساسية الداخلة في تركيب دالة الهدف والقيود تأخذ شكل الخط المستقيم، وأن هذا الافتراض كثيرا ما يستخدم لتقريب الواقع إلى صيغة رياضية مبسطة، أما البرمجة الخطية فهي الطريقة الرياضية لتخصيص الموارد النادرة أو المحددة من أجل تحقيق هدف معين ضمن شروط أو قيود معينة، حيث يكون من المستطاع التعبير عن الهدف والقيود في صورة معادلات أو متباينات خطية.[2]

كما تعرف البرمجة الخطية على أنها تقنية رياضية تبحث عن حلول لمشكلة اقتصادية (إنتاجية، مالية، نقل، تحليل المشاريع، مباريات أو خدمات) واختيار الحل الأمثل، هذه التقنية الرياضية تستعمل من طرف الموظفين، الإحصائيين والمسيرين لإيجاد الطريقة المثلى لتخصيص موارد المؤسسة المحدودة المستعملة لاستخدامات مختلفة من أجل تحقيق هدف معين.[3]

يقصد بالطريقة المثلى حل أمثل يمكن المؤسسة من الوصول إلى الهدف المطلوب، مع الأخذ بعين الاعتبار التزاماتها الداخلية والخارجية وعلاقتها مع المحيط وموقعها في السوق ومكانتها الاقتصادية، إذا كان هدف المؤسسة هو تحقيق أكبر ربح ممكن مثلا، فإنه يجب على مسيري المؤسسة توفير كل الإمكانيات الإنتاجية والإدارية لكي يتحقق الهدف المطلوب، مهما تكن هذه الإمكانيات فإن المؤسسة تكون مقيدة بعدة عوامل نذكر منها:[4]

أ–قيود إنتاجية:

- عدد ساعات العمل على الآلات المختلفة.
- عدد ساعات عمل اليد العاملة.
- المادة الأولية المستخدمة في العملية الإنتاجية.

[1] – محمد عبد العال النعيمي وآخرون، **بحوث العمليات**، دار وائل للنشر، الأردن، الطبعة الثانية، 2011، ص15.

[2] – جهاد صياح بني هاني وآخرون، **بحوث العمليات والأساليب الكمية نظرية وتطبيق**، دار جليس الزمان، الأردن، 2009، ص25.

[3] –بوقرة رابح، **بحوث العمليات**، مؤسسة شباب الجامعة، مصر، 2009، ص ص 21-22.

[4] – بوقرة رابح، مرجع سبق ذكره، ص22.

ب–قيود طلب:

- الكمية المطلوبة الواجب إنتاجها.
- الكمية التي يجب توزيعها.
- طريقة التوزيع ووسائل النقل.

ج–قيود التخزين:

- الكمية الممكن تخزينها.
- الكمية الممكن إعادة طلبها.

وعلى ضوء هذه القيود، فإن الحل الأمثل الذي يبحث عنه المسير باستعمال تقنيات البرمجة الخطية، هو ذلك الحل الذي يحدد له كمية الإنتاج الواجب إنتاجها والتي تمكن المؤسسة من تحقيق أعظم ربح.

إذن يمكن تعريف البرمجة الخطية اختصارا على أنها طريقة لمعالجة النماذج الخطية حيث تكون كل من دالة الهدف والقيود دوالا خطية في متغيرات القرار، وتهتم مسائلها عموما بتخصيص الموارد النادرة واستخدامها بأفضل طريقة ممكنة، وتتعامل بشكل خاص مع المسائل التي تتضمن إيجاد أفضل قيمة لدالة الهدف(أكبر قيمة أو أصغر قيمة حسب الهدف)، تحت عدد من القيود الناتجة عن محدودية الموارد في معظم الأحيان، إذن البرمجة الخطية هي طريقة رياضية تستخدم للمساعدة في التخطيط، وصنع القرارات المتعلقة بالتوزيع الأمثل للموارد المتاحة بهدف زيادة الأرباح أو تخفيض التكاليف.

هناك مجموعة واسعة (وتتسع باستمرار) من التطبيقات للبرمجة الخطية نستعرض بعضها على سبيل المثال لا الحصر فيما يلي[5]:

أ– **مشاكل الإنتاج:** كتحديد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها من كل نوع من المنتجات، التي ينتجها المشروع بالشكل الذي يعظم الأرباح، في ظل إمكانيات مختلفة محدودة.

ب– **المزيج الإنتاجي:** في كثير من الصناعات هناك عدد من المكونات أو العناصر التي تخلط مع بعضها وبنسب معينة، لتعطي منتجا آخرا جديدا كصناعة الأعلاف والأدوية والأسمدة.....إلخ،

[5] – محمد محمد كعبور، **أساسيات بحوث العمليات نماذج وتطبيقات**، منشورات أكاديمية الدراسات العليا، ليبيا، 2005، ص ص 115-116.

والهدف هنا هو تحديد الكميات التي يجب استخدامها لكل عنصر، وذلك لصنع المنتج الجديد عند أقل تكلفة ممكنة، مع ضمان وجود خصائص إنتاجية معينة فيه.

ج- **تخطيط الاستثمارات**: لنفترض أن هناك مبلغا ماليا معينا، ويراد تحديد مقدار ما ينفق منه على عدد من البدائل الاستثمارية، لجعل مجموعة العوائد السنوية أكبر ما يمكن علما أن المشروع ليس لديه أية أموال أخرى عدا هذا المبلغ، ويمكن علاج هذا النوع من المشاكل باستخدام البرمجة الخطية.

د- **التخطيط للدعاية والإعلان**: في هذا النوع من المشاكل يكون الهدف هو تحديد حجم الأموال التي يجب صرفها على مجموعة مختلفة من وسائل الإعلان، من أجل ترويج السلعة المنتجة بفعالية مثلى، تحت عدد من القيود مثل: قدرة السوق الاستيعابية، محدودية الموارد المالية، الحدود المفروضة على استخدام كل وسيلة من تلك الوسائل الإعلانية.

هـ- **مشاكل الشحن**: يكون الهدف تحديد عدد الوحدات التي يجب شحنها من منتجات مختلفة باستخدام وسيلة نقل معينة ذات طاقة تحميلية محدودة، لتعظيم الأرباح في الوقت الذي يراد فيه نقل كميات معينة مطلوبة من السلعة المنتجة.

للبرمجة الخطية تطبيقات عديدة ظهرت ولا زالت تتطور باستمرار، حيث تلعب دورا بارزا في مساندة صانعي القرارات في منظمات الأعمال من أجل حل المشاكل التي يواجهونها.

ثانيا: تاريخ تطور البرمجة الخطية.

استحدثت البرمجة الخطية لمواجهة مشاكل محددة تحت ظروف وشروط معينة، إلا أن استخداماتها توسعت بفضل تطوير الوسائل المساعدة لتشمل مجالات متعددة، فأول استخدام للبرمجة الخطية كان في المجالات العسكرية للمساعدة في توزيع الموارد المتاحة بين العمليات المختلفة، وبالشكل الذي يؤدي إلى زيادة فعالية هذه العمليات.

خلال الحرب العالمية الثانية ونتيجة محدودية الموارد العسكرية كلفت الحكومة البريطانية فريقا من كبار العلماء بدراسة مسائل كيفية توزيع مواردها العسكرية، وما يتناسب مع أفضل وضع دفاعي جوي وبري، ولقد أطلق على الفريق اسم بحوث العمليات أو البحث العملياتي، ثم أخذت هذه التسمية تطلق على كافة الأبحاث

والدراسات التي تتعامل مع مسائل البرمجة أو التوزيع ومسائل اتخاذ القرار، وقد حثت النتائج المشجعة لفريق بحوث العمليات البريطاني الإدارة العسكرية الجوية الأمريكية على تكوين فريق مشابه للقيام بالدراسات اللازمة في هذا المجال، فقد وجدت هذه الفرق أن أساليب مسائل التفضيل التقليدية، كطريقة مضاعف لاغرانج مثلا ليست ذات فائدة كبيرة في حل مسائل البرمجة الخطية، مما استوجب إيجاد أساليب أكثر فعالية في عام 1947 حين طور **جورج دانتزغ** عضو الفريق الأمريكي لبحوث العمليات الطريقة المبسطة (السمبلكس) لحل مسألة البرمجة الخطية، لكن لم تنشر تفاصيل هذه الطريقة إلا في عام 1956[6].

يمكن القول بأن الكثير من الأعمال المبكرة والمتعلقة بالبرمجة الخطية قد تطورت وازدادت بسبب الحاجة التخطيطية للقوة الجوية الأمريكية، التي أدركت المساهمات الهامة للبرمجة الخطية خلال الحرب العالمية الثانية، لكن تعود بدايات تطبيق البرمجة الخطية إلى ما قدمه **الاقتصادي المعروف البروفيسور ويسلي ليونتيف** أثناء الركود الاقتصادي في الثلاثينات من القرن الماضي، من خلال تحليل العلاقة بين المدخلات والمخرجات باستخدام نماذج المدخلات والمخرجات، وإلى ما قدمه **العالم الرياضي الفرنسي جين بابتستي فورير** عام 1923، في حين اهتم **العالم الرياضي الروسي كاتوروفتش** باستخدام علم الرياضيات لحل مشاكل التخطيط عام 1939، وقام **الاقتصادي المعروف جورج ستجلر** في بداية الأربعينيات بمحاولة تطبيق البرمجة الخطية والذي لم يتوصل إلى وسيلة حل معروفة في حينها، كان هدفه تحديد مكونات الغذاء اليومي وهي مشكلة تتعلق بإيجاد مزيج غذائي أمثل بأقل تكلفة ممكنة[7].

تطورت البرمجة الخطية بعد ذلك بحيث أصبح بالإمكان استخدامها في معظم مجالات اتخاذ القرارات، سواءا كانت ذات طبيعة اقتصادية أو اجتماعية أو عسكرية، فهي تستخدم مثلا في كافة أنشطة منظمات الأعمال كتخطيط ومراقبة الإنتاج، التسويق، الدعاية، الإعلان، اختيار الفرص الاستثمارية، سياسات الشراء والتخزين...إلخ، وقد زادها الحاسوب أهمية عندما أعطاها السرعة في تنفيذ خطواتها وفي توفير الجهد البشري، خاصة عندما يكون عدد المتغيرات كثير والبيانات المتوفرة كبيرة الحجم.

---

[6] – لحسن عبد الله باشيوة، **بحوث العمليات**، دار اليازوري العلمية، الأردن، 2011، ص ص 83-84.

[7] – حسن ياسين طعمة وآخرون، **بحوث العمليات نماذج وتطبيقات**، دار الصفاء للنشر والتوزيع، الأردن، 2009، ص 37.

ثالثا: افتراضات البرمجة الخطية

يقصد بالافتراضات الشروط العلمية الأساسية الواجب توفرها في المشكلة حتى نستطيع حلها بواسطة البرمجة الخطية، ويمكن القول بأن هناك مجموعة من الافتراضات الأولية لمشكلة البرمجة الخطية يمكن تلخيصها فيما يلي:[8]

أ–الخطية: لتطبيق البرمجة الخطية يفترض أن تكون العلاقة في دالة الهدف وفي المتباينات علاقة خطية، أي أن هناك علاقة خطية بين المتغيرات المؤثرة في المشكلة قيد الدراسة، بحيث عند حدوث أي تغيير في قيمة أحدهما تسبب تغيرات متناسبة وثابتة في قيمة الآخر[9] .

أ–التأكد: يعني أن الأرقام الموجودة في دالة الهدف "مساهمات العوامل" والمحددات أو القيود "احتياجات العوامل والمصادر المتوفرة" معروفة وثابتة وغير قابلة للتغير أثناء معالجة المشكلة موضوع البحث.

ب–التناسبية: يعتبر كل نشاط مستقل عن الآخر، ذلك أن معيار الانجاز هو حاصل جمع مساهمات العوامل المختلفة، كذلك فإن الكميات التي يتم استخدامها من الموارد المختلفة تتناسب مع احتياجات العوامل المختلفة من كل هذه الموارد، فعلى سبيل المثال إذا كنا نحتاج إلى وحدتين من المواد الأولية لإنتاج وحدة واحدة تامة الصنع من منتج معين، فإننا نحتاج إلى أربعين وحدة من المواد الأولية لإنتاج عشرين وحدة من هذا المنتج، وهذا الافتراض هو أساس افتراض الإضافة.

ج–الإضافة: يعني هذا الافتراض أن كمية المواد الأولية الداخلة في الإنتاج وكميات الإنتاج قابلة للإضافة، كما أنه لا يوجد تداخل بين الأنشطة المختلفة، بصيغة أخرى إن مجموع نواتج الأنشطة الإنتاجية ما هي إلا مجموع نواتج كل نشاط إنتاجي على حدا داخل الخطة الواحدة.

د–قابلية القسمة أو التجزئة: المقصود هنا أن الحل لمشكلة البرمجة الخطية ليس بالضرورة أن يكون بأعداد صحيحة، وهذا يعني قبول كسور كقيم لعوامل القرار، وإذا كان من الصعب إنتاج أجزاء من المنتج فعند ذلك نلجأ إلى استخدام البرمجة الصحيحة أو الرقمية.

[8] –محمد أحمد الطراونة وسليمان خالد عبيدات، **مقدمة في بحوث العمليات**، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة، الأردن، الطبعة الثانية، 2010، ص ص 78-79.

[9] – محمد عبد العال النعيمي وآخرون، مرجع سبق ذكره، ص 17.

هـ-اللاسلبية: هذا يعني أن قيم متغيرات القرار يجب أن تكون موجبة "غير سالبة"، فالقيم السالبة للكميات المادية حالة مستحيلة، فعلى سبيل المثال لا نستطيع إنتاج عدد سالب من الكراسي أو القمصان أو المصابيح الكهربائية أو إطارات السيارات وغيرها.

رابعا: محددات البرمجة الخطية.

بالرغم من أن البرمجة الخطية قد أثبتت أنها وسيلة جيدة لحل المشاكل الكبيرة والمعقدة في القطاعين الخاص والعام، إلا أن هنالك بعض الانتقادات الموجهة لها والتي يمكن تلخيصها فيما يأتي[10]:

أ-لا يوجد ضمان في الحصول على قيم صحيحة للمتغيرات باستخدام البرمجة الخطية، فعلى سبيل المثال قد يتضمن الحل 5,3 وحدة لكن المدير يستطيع إنتاج 6 وحدات أو 5 وحدات، وفي بعض الحالات التي تدور حول افتتاح مصنع أو فرع جديد (حيث تكون قيمة المتغير صفر أو واحد)، فإن الوصول إلى نتيجة كسرية قد لا يعني شيئا، ولحسن الحظ في مثل هذه الحالات يمكن استخدام البرمجة الصحيحة.

ب-لا تسمح البرمجة الخطية بحالة عدم التأكد، يفترض النموذج المعرفة التامة بمساهمة العوامل واحتياجاتها وكذلك المصادر المتاحة، علما بأن هذه القيم قد لا تكون معروفة في الواقع، ولحل هذه المشكلة هناك وسائل أخرى يمكن استخدامها، كالبرامج الخطية في حالة عدم التأكد أو برمجة الفرصة المحددة.

ج-يتعلق المحدد الثالث بافتراض العلاقات الخطية أو المستقيمة فيما يتعلق بدالة الهدف والقيود، ففي بعض الحالات العملية تكون علاقة دالة الهدف والقيود بالمتغيرات غير خطية، لذلك فإن أفضل وسيلة لمعالجة مثل هذه المشاكل هي البرمجة اللاخطية.

د-لا تأخذ البرمجة الخطية في التحليل أي اعتبار للعوامل التي لا يمكن إعطاؤها قيمة كمية والتي قد تؤثر بدرجة كبيرة على اتخاذ القرارات، كما تتطلب البرمجة الخطية كمية من المعلومات التي قد يكون من الصعب الحصول عليها في الظروف العادية في المؤسسات الصغيرة والمتوسطة الحجم، بالإضافة

[10] – محمد أحمد الطراونة وسليمان خالد عبيدات، مرجع سبق ذكره، ص 80.

إلى ما سبق فإنها تتطلب ضرورة استخدام الحاسب الالكتروني للمساعدة في حل المشاكل الكبيرة والمعقدة، التي يحتاج حلها يدويا إلى وقت طويل[11].

بالرغم من الانتقادات الموجهة للبرمجة الخطية إلا أنها تعتبر من أساليب التحليل الاقتصادي المهمة، تساعد على اتخاذ القرارات الإدارية السليمة وتوفر الموارد الاقتصادية المتاحة وتضعها في أفضل استخدام لها، وذلك في ضوء الهدف المرغوب تحقيقه.

خامسا: الشكل العام للبرنامج الخطي.

إن جميع المواقف الاقتصادية والإدارية التي تقود إلى نماذج رياضية خطية تتصف بالصفات التالية:

أ–وجود عدد من المتغيرات: تدعى متغيرات القرار التي يجب تحديد قيمتها للوصول إلى الهدف المنشود (أكبر ربح، أقل تكلفة)، نرمز لهذه المتغيرات بـ[12]:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n$$

حيث n هو عدد المتغيرات في المسألة المدروسة.

تعبر هذه المتغيرات عن مفاهيم عديدة مثل:

1- كميات إنتاج لمنتجات معينة.
2- ساعات عمل في أقسام معينة من مصنع أو شركة أو مؤسسة.
3- مبالغ من المال المخصص لأنشطة أو فعاليات معينة.
4- كميات من مواد منقولة على طريق معينة أو بوسائل نقل معينة.
5- كمية المواد الأولية اللازمة لتصنيع منتج معين.

ب–وجود هدف يراد الوصول إليه: يعبر عنه رياضيا بدالة خطية تدعى دالة الهدف، وتأخذ الشكل العام التالي:

---

[11]–منعم زمزير الموسوي، **بحوث العمليات –مدخل علمي لاتخاذ القرارات–**، دار وائل للنشر والتوزيع، الأردن، 2009، ص ص 55-56.

[12]–إبراهيم نائب، إنعام باقية، **بحوث العمليات – خوارزميات وبرامج حاسوبية–**، دار وائل للنشر والتوزيع، الأردن، 1999، ص29.

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

حيث c_j أعداد حقيقية تدعى بمعاملات المتغيرات في دالة الهدف، وتصنف الأهداف التي تعالجها البرمجة الخطية إلى مجموعتين[13]:

1- **تعظيم دالة الهدف(Maximisation)**: كأن نسعى إلى تعظيم الربح أو الإنتاج، أو تعظيم استخدام الموارد المتاحة ورؤوس الأموال واليد العاملة، تعظيم طاقات التخزين، ويرمز لدالة الهدف في هذه الحالة كما يلي:

$$MAX\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

2- **تصغير دالة الهدف (Minimisation)**: كأن نسعى إلى تخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن، أو تقليل الخسائر، تخفيض الوقت الضائع وزمن غياب العاملين، تقليل زمن تعطل الآلات، تقليل المخاطرة في الشغل، ويرمز لدالة الهدف في هذه الحالة كما يلي:

$$MIN\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

ج-وجود علاقة تأثير بين المتغيرات: يعبر عنها رياضيا بمتراجحات تدعى الشروط الخطية أو قيود المسألة، وهي مجموعة من المحددات التي تحد من درجة تحقيق الأهداف، فعملية تحقيق الهدف تشترط الاستجابة لهذه المتطلبات بشكل جماعي[14]، وتأخذ أحد الشكلين التاليين:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \quad \leq \quad b_i \quad ; \quad i = 1,2,\dots,m$$

إذا كانت دالة الهدف من نوع تعظيم أي Max.

[13] – أبو القاسم مسعود الشيخ، **بحوث العمليات**، المجموعة العربية للتدريب والنشر، مصر، ط2، 2014، ص30.

[14]– أكرم محمد عرفان المهتدي، **الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية**، دار الصفاء للنشر والتوزيع، الأردن، 2004، ص19.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i \geq b_i \quad ; \quad i = 1,2, \dots, m$$

إذا كانت دالة الهدف من نوع تصغير أي Min.

حيث أنه في كلا الشكلين:

n: تعبر عن عدد المتغيرات في النموذج الخطي.

m: عدد قيود المسألة (عدد الشروط الخطية).

a_{ij} : أعداد حقيقية تدعى معاملات المتغيرات في قيود المسألة.

b_i: أعداد حقيقية تعبر عن الموارد المتاحة أو المتطلبات اللازمة لكل قيد من قيود المسألة.

د–توفر مجموعة من الشروط: يجب أن تحقق المتغيرات شروط معينة بغض النظر عن مردودها من حيث الهدف الذي يجب أن تحققه مثلا[15]:

1- أن لا تقل قيمة أحد المتغيرات عن كمية معينة بسبب التزامات معينة للإدارة صاحبة المشكلة (مثال: يجب إنتاج على الأقل 50 وحدة من النوع (x_1)، بسبب أن هذه الكمية مباعة سالفا، لذلك في هذه الحالة يجب إضافة شرط إلى النموذج الرياضي الخطي وهو: $x_1 \geq 50$).

2- أن لا تزيد قيمة أحد المتغيرات عن كمية معينة بسبب حجم الطلب المتدني على المنتج الذي يمثله هذا المتغير(مثال: بسبب وجود منتج منافس في السوق للمنتج المصنع في المصنع، وحتى يبقى اسم المصنع ومنتجاته موجود في الأسواق، فإن إدارة المصنع تقرر إنتاج كمية محددة بحيث لا تزيد عن إمكانية استيعاب السوق وهي 10 وحدات $x_1 \leq 10$).

3- أن يشترط على المتغيرات أو بعضها أن تكون بقيم صحيحة، وخاصة إذا كانت تعبر عن عدد العمال أو إنتاج منتج يقاس بالقطعة وليس بأجزائها.

4- يشترط على المتغيرات أن تكون غير سالبة $x_i \geq 0$ وهذا ما يجب فرضه على جميع النماذج، فهي تعبر جميعها عن كميات إنتاج، والكميات لا يمكن أن تكون سالبة، وإذا صدف أن أحد المتغيرات لا يشترط فيه عدم السالبية يجب التخلص منه.

[15] – إبراهيم نائب، إنعام باقية، مرجع سبق ذكره ، ص 31.

بناءا على ما سبق فإن البرنامج الخطي في حالة التعظيم يأخذ الشكل النظامي التالي[16]:

$$MAX\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \quad \leq \quad b_i \quad ; \quad i = 1,2,\dots,m$$

$$x_i \geq 0$$

أو بالشكل المفصل:

$$Max\ Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$s/c \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n \leq b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \ , x_2 \geq 0 \ , x_3 \geq 0 \ , \quad x_n \geq 0$$

وبصيغة المصفوفات يأخذ الشكل التالي:

$$\text{Max } Z = C'X$$

$$s/c \begin{cases} AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

حيث:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, C = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \cdots \quad c_n]$$

[16] - محمد راتول، **بحوث العمليات**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، ط 4، 2011، ص ص 10-12.

C': هو منقول مصفوفة معاملات دالة الهدف الاقتصادية.

X: هو شعاع المتغيرات.

A: هي مصفوفة معاملات القيود.

B: هو شعاع الثوابت.

S/C: تعني تحت القيود، والمراد هو تعظيم دالة الهدف في حدود الطاقات المتاحة المعبر عنها بمعادلات أو متراجحات.

أما البرنامج الخطي في حالة تصغير فيأخذ الشكل النظامي التالي[17]:

$$MIN\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \quad \geq \quad b_i \quad ; \quad i = 1,2,\dots,m$$

$$x_i \geq 0$$

أو بالشكل المفصل:

$$Min\ Z = \ c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s/c} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \ \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \ \geq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n \ \geq b_3 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \ \geq b_m \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \ , \quad x_2 \geq 0 \ , x_3 \geq 0 \ , \qquad x_n \geq 0$$

[17] – محمد راتول، مرجع سبق ذكره، ص ص 13-14.

أما بصيغة المصفوفات فيأخذ الشكل التالي:

$$\text{Min } Z = C'X$$

$$s/c \begin{cases} AX \geq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

حيث C' , A, B , X كما هي معرفة سابقا.

سادسا: صياغة نموذج البرمجة الخطية.

تعبر عن الطريقة التي تترجم بواسطتها المشكلة المدروسة إلى علاقات رياضية، أي أسلوب صياغتها بشكل رياضي وذلك بتحديد دالة *الهدف* الخطية التي تخضع للعديد من القيود الخطية، وتعتبر هذه المرحلة من أعقد المراحل في تحليل المشاكل الإدارية والاقتصادية والهندسية، لأنه بمجرد الانتهاء من صياغة المشكلة بشكل كمي تصبح بقية المراحل سهلة، لأن المراحل المتبقية تتضمن إيجاد حل البرنامج المصاغ بإحدى الخوارزميات المعروفة (الطريقة البيانية – السمبلكس) وإذا استخدم الحاسوب في إيجاد الحل المناسب فنكون بذلك قد اختصرنا وقتا وجهدا كبيرين.

غالباً ما تتبع الخطوات التالية مع معظم المشاكل التي تصاغ بشكل خطي[18]:

أ– التعبير عن المشكلة بصورة وصفيه، من خلال تحديد ما يلي:

1- تحديد الهدف النهائي للمشكلة المدروسة، أي إذا كانت تتعلق بتعظيم الأرباح أو تخفيض التكاليف، أو تقليل كمية عناصر الإنتاج المستخدمة، أو الاستفادة القصوى من عنصر العمل البشري وغيرها من الأهداف.
2- بعد تحديد الهدف النهائي يجب توضيح العلاقة الموجودة بين الهدف والمتغيرات التي يستطيع متخذ القرار السيطرة عليها.
3- تعريف القيود المتعلقة بالمشكلة المدروسة.

[18] – إبراهيم نائب، إنعام باقية، مرجع سبق ذكره، ص ص 34-35.

ب- المرحلة التالية بعد أن يتم التعريف الوصفي للمشكلة هي تحويل الشكل الوصفي للمشكلة إلى شكل رياضي، وذلك بوضعها في الصيغة الرياضية المناسبة من خلال إتباع الخطوات التالية:

1- تحديد المتغيرات X_j (حيث $j=1,2\ldots n$) المتعلقة بالمشكلة، وتعريفها مع تعريف وحدات القياس المستعملة بالنسبة لكل متغير.
2- تحديد معاملات مساهمة المتغيرات في تحقيق الهدف (C_i) مع تعريف الوحدات المستعملة لقياس تلك المساهمة.
3- تحديد دالة الهدف مع التأكد من استخدام وحدة القياس نفسها.
4- تحديد معاملات المتغيرات (a_{ij}) (معدلات الإحلال)، مع الأخذ بعين الاعتبار وحدات القياس المناسبة لكل معامل.
5- تحديد الموارد المتاحة أو المتطلبات اللازمة لحل المشكلة، أي الثابت إلى يمين الشروط الخطية (b_i) مع تحديد وحدات قياس الموارد المستخدمة.
6- التعبير عن القيود المتعلقة بكل مورد من الموارد المتاحة بصورة رياضية، والتأكد من انسجام وحدات القياس لكل من القيود.
7- تحديد شروط عدم السالبية المتعلق بالمتغيرات في المشكلة المطروحة، أو الشروط الأخرى إن وجدت.

إن إتباع هذه الخطوات في صياغة النماذج الخطية سوف يقلل إلى حد كبير من حجم الأخطاء الممكن ارتكابها، وقبل الانتقال إلى صياغة بعض الأمثلة المعبرة عن المسائل الاقتصادية والإدارية، لا بد من أن نشير إلى أن نماذج البرمجة الخطية لا تتضمن الحصول على قيم المتغيرات بأرقام صحيحة، وإنما يمكن أن تكون القيم أرقاما صحيحة وحقيقية، وقد لا يكون هذا مناسباً لبعض الحالات الاقتصادية، مثل تحديد كميات إنتاج السيارات أو الطائرات أو ... إلخ، لذلك من أجل الحصول على قيم صحيحة توجد أساليب متعددة تدعى أساليب البرمجة الخطية العددية الصحيحة.

مثال1:

معمل للجلود يقوم بإنتاج نوعين من الحقائب الجلدية هما A وB، إنتاج حقيبة واحدة من نوع A يحتاج إلى 2متر من الجلود و3 ساعات عمل أسبوعية، بينما إنتاج حقيبة واحدة من النوع B يحتاج إلى متر واحد من

الجلود وساعتي عمل أسبوعية، ربح الحقيبة الواحدة من النوع A هو 300 دينار و ربح الحقيبة الواحدة من النوع B هو 200 دينار، مع العلم أن كمية الجلود الأسبوعية المتوفرة هي 100 متر مع ساعات عمل أسبوعية مقدارها 120 ساعة.

كون البرنامج الخطي للمسألة الذي يسمح بإيجاد عدد الحقائب المنتجة أسبوعيا من النوعين A وB لتعظيم الربح الأسبوعي للمعمل؟

الحل:

1- تحديد متغيرات القرار: تمثل الكميات الواجب إنتاجها من كل منتج كالأتي:

x_1: عدد الحقائب المتوقع إنتاجها من النوع A.

x_2: عدد الحقائب المتوقع إنتاجها من النوع B.

2- تحديد قيود المسألة: تتحدد بما هو متاح من موارد (جلود، ساعات عمل) كما يلي:

- بما أن إنتاج الحقيبة الواحدة من النوعين A وB يتطلب 2متر و1 متر على التوالي، إذن كمية الجلود المطلوبة لإنتاج الحقائب من النوع A هي $2x_1$، أما كمية الجلود المطلوبة لإنتاج الحقائب من النوع B هي x_2، وهكذا فإن مجموع كمية الجلود المطلوبة لإنتاج النوعين A وB لا يجب أن تتجاوز كمية الجلود المتاحة التي هي 100 متر، ولذلك فإن قيد الجلود يكون بالصورة التالية:

$$2X_1 + X_2 \leq 100$$

- بالنسبة للوقت فإن إنتاج الحقيبة الواحدة من النوع A يتطلب 3 ساعات عمل أسبوعية، أي أن الوقت المتطلب لإنتاج الحقائب من النوع A هو $3x_1$، أما الوقت المتطلب لإنتاج الحقيبة الواحدة من النوع B هو $2x_2$، وعليه فإن الوقت المتطلب لإنتاج الحقائب من النوعين A وB لا يجب أن يتجاوز ساعات العمل الأسبوعية المتمثلة بـ 120 ساعة، لذلك فإن قيد ساعات العمل يكون بالصورة التالية:

$$3X_1 + 2X_2 \leq 120$$

-لا يمكن أن يكون عدد الحقائب المنتجة سالبا (شرط عدم السالبية) أي أن:

$$X_1 \geq 0 \quad , \quad X_2 \geq 0$$

3- تحديد دالة الهدف: يتمثل في تعظيم الربح الناتج من إنتاج الحقائب من النوع A وهو $300x_1$، والربح الناتج عن إنتاج الحقائب من النوع B وهو $200x_2$، إذن الربح الإجمالي يساوي: $Z = 300X_1 + 200X_2$

الهدف هو تعظيم z لتكون أكبر ما يمكن لذلك تكتب دالة الهدف بالصورة التالية:

$$\text{MAX } Z = 300X_1 + 200X_2$$

بناءا على ما سبق يكون البرنامج الخطي للمسألة على الشكل التالي:

$$\text{MAX } z = 300X_1 + 200X_2$$

$$S/C \begin{cases} 2X_1 + X_2 \leq 100 \\ 3X_1 + 2X_2 \leq 120 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 \quad , \quad X_2 \geq 0$$

مثال2:

يعمل متعهد طعام في إحدى الثكنات العسكرية على إعداد وجبات الطعام المتعلقة بالجنود، وفق نظام طبي خاص مؤلف من نوعين من الطعام، يدخل في تركيب كل منها ثلاثة مقومات غذائية أساسية A وB وC، يتوجب على الجندي أن يحصل على 1000 وحدة يوميا على الأقل من A و2000 وحدة يوميا على الأقل من B، و1500 وحدة يوميا على الأقل من C، يحتوي كل كيلوغرام من النوع الأول من الطعام على 100 وحدة من A و400 وحدة من B و200 وحدة من C، أما كل كيلوغرام من النوع الثاني من الطعام فيحوي على 200 وحدة من A و250 وحدة من B و200 وحدة من C.

يسعى المتعهد إلى إيجاد طريقة يستطيع بواسطتها إعداد وجبة الطعام الطبية الخاصة ذات الكلفة الأقل، والتي تناسب احتياجات الجندي اليومية، مع العلم أن كلفة الكيلوغرام الواحد من النوع الأول من الطعام تعادل 600 دينار، أما كلفة الكيلوغرام من النوع الثاني من الطعام تعادل 800 دينار.

الحل:

1- تحديد متغيرات القرار: تمثل كميات الطعام كالأتي:

x_1: كمية الطعام من النوع الأول الذي يستهلك يوميا في الوجبة الغذائية.

x_2: كمية الطعام من النوع الثاني الذي يستهلك يوميا في الوجبة الغذائية.

2- تحديد قيود المسألة: تعبر عن الشروط المتعلقة بالمقومات الغذائية كما يلي:

- المقومة الغذائية A: النوع الأول من الطعام يحتوي على 100 وحدة من A، أما النوع الثاني من الطعام فيحتوي على 200 وحدة من A، مجموع هذه الكميات لا يجب أن يقل عن الحد الأدنى الذي يتطلبه جسم الجندي يوميا والذي يساوي 1000 وحدة، وبالتالي يكتب القيد بالصورة التالية:

$$100x_1 + 200x_2 \geq 1000$$

- المقومة الغذائية B: النوع الأول من الطعام يحتوي على 400 وحدة من B، أما النوع الثاني من الطعام فيحتوي على 250 وحدة من B، مجموع هذه الكميات لا يجب أن يقل عن الحد الأدنى الذي يتطلبه جسم الجندي يوميا والذي يساوي 2000 وحدة، وبالتالي يكتب القيد بالصورة التالية:

$$400x_1 + 250x_2 \geq 2000$$

- المقومة الغذائية C: النوع الأول من الطعام يحتوي على 200 وحدة من C، أما النوع الثاني من الطعام فيحتوي على 200 وحدة من C، مجموع هذه الكميات لا يجب أن يقل عن الحد الأدنى الذي يتطلبه جسم الجندي يوميا والذي يساوي 1500 وحدة، وبالتالي يكتب القيد بالصورة التالية:

$$200x_1 + 200x_2 \geq 1500$$

-لا يمكن أن تكون كميات الطعام سالبة (شرط عدم السالبية) أي أن:

$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$$

3- تحديد دالة الهدف: تتمثل في تدنئة كلفة الكيلوغرام الواحد من النوع الأول من الطعام A وهو $600x_1$، وكلفة الكيلوغرام الواحد من النوع الثاني من الطعام B وهو $800x_2$، إذن الكلفة الإجمالية تساوي:

$$z = 600x_1 + 800x_2$$

الهدف هو تدنئة z لتكون أقل ما يمكن لذلك تكتب دالة الهدف بالصورة التالية:

$$\text{Min } z = 600x_1 + 800x_2$$

بناءا على ما سبق يكون البرنامج الخطي للمسألة على الشكل التالي:

$$\text{Min } z = 600x_1 + 800x_2$$

$$S/C \begin{cases} 100x_1 + 200x_2 \geq 1000 \\ 400x_1 + 250x_2 \geq 2000 \\ 200x_1 + 200x_2 \geq 1500 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$$

وهكذا نكون قد انتقلنا من الشكل الوصفي للمسألة إلى الشكل الرياضي، أي قمنا بتشكيل البرنامج الخطي أو بناء النموذج الخطي، وهو مؤلف من مجمعين أساسيين، الأول هو دالة الهدف المراد تعظيمها أو تدنئتها، والثاني هو مجموعة القيود التي يجب احترامها.

تمارين محلولة:

التمرين الأول: تقوم شركة بإنتاج أربع أنواع من الدراجات الهوائية (D,C,B,A)، تملك الشركة خطين إنتاجيين، وإنتاج أي نوع من الأنواع الأربعة يجب أن يمر خلال هذين الخطين، إنتاج الدراجة الهوائية (A) يتطلب 2 ساعة عمل للخط الإنتاجي الأول، و03 ساعات عمل للخط الإنتاجي الثاني، بينما إنتاج الدراجة الهوائية (B) يتطلب ساعة عمل واحدة للخط الإنتاجي الأول و4 ساعات عمل للخط الإنتاجي الثاني، وإنتاج الدراجة الهوائية (c) يتطلب 2 ساعة عمل للخط الإنتاجي الأول و2 ساعة عمل للخط الإنتاجي الثاني، وإنتاج الدراجة الهوائية (D) يتطلب 3 ساعات عمل للخط الإنتاجي الأول و4 ساعات عمل للخط الإنتاجي الثاني، مقدار ما هو متوفر من ساعات العمل الأسبوعية للخطين الإنتاجيين هي 150 ساعة عمل للخط الأول، و120ساعة

عمل للخط الثاني، تبيع الشركة الدراجة الهوائية (A) بمبلغ 15000 دينار وكلفة إنتاجها تبلغ 13000 دينار، أما الدراجة الهوائية (B) فتباع بمبلغ 17000 دينار وكلفة إنتاجها تبلغ 14500 دينار، الدراجتين الهوائيتين (D وc) تباعان بمبلغ 22000 دينار وكلفة إنتاجهما تبلغ 18500 دينار، كلفة نقل الدراجات الهوائية من الشركة إلى المنافذ التسويقية تكون على حساب الشركة وهي 1000 دينار للدراجة الهوائية (A)، و500 دينار للدراجة الهوائية (B)، و500 دينار للدراجة الهوائية (c)، و1500 دينار للدراجة الهوائية (D).

المطلوب: بناء نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة، للتوصل إلى كمية الإنتاج الأسبوعي لكل أنواع الدراجات الذي يؤدي إلى تعظيم أرباح الشركة.

الحل:

x_1: عدد الدراجات الهوائية المنتجة من النوع A.

x_2: عدد الدراجات الهوائية المنتجة من النوع B.

X_3: عدد الدراجات الهوائية المنتجة من النوع C.

X_4: عدد الدراجات الهوائية المنتجة من النوع D.

صافي الربح للأنواع الأربعة من الدراجات الهوائية هو:

صافي الربح للدراجة الهوائية من النوع A	15000-(13000+1000)=1000
صافي الربح للدراجة الهوائية من النوع B	17000-(14500+500)=2000
صافي الربح للدراجة الهوائية من النوع C	22000-(18500+500)=3000
صافي الربح للدراجة الهوائية من النوع D	22000-(18500+1500)=2000

$$\text{Max } z = 1000x_1 + 2000x_2 + 3000x_3 + 2000x_4$$

$$S/C \begin{cases} 2X_1 + X_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 150 \\ 3X_1 + 4X_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 120 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0 \ , \quad x_3 \geq 0 \ , \ x_4 \geq 0$$

التمرين الثاني:

تنتج إحدى الشركات لصناعة الأدوية نوعا من الأدوية يستخدم لتسكين الآلام، يتكون هذا المسكن من عنصرين هما A وB، يحتوي كل عنصر منهما على ثلاث مضادات حيوية هي c_1 وc_2 وc_3، وبنسب مختلفة، يحتاج كل 1غ من A إلى 3 وحدات من c_1، وكل 1غ من B يحتاج إلى وحدة واحدة من c_1، ويتطلب المسكن 6 وحدات من c_1، وعلى الأقل 4 وحدات من c_2، ويحتاج كل 1غ من A وB إلى وحدة واحدة من c_2، وأيضا إنتاج هذا المسكن يتطلب على الأقل 12 وحدة من المضاد c_3، حيث أن كل 1غ من A يحتاج إلى 3 وحدات من c_3، كل 1غ من B يحتاج إلى 6 وحدات من c_3، قدرت الشركة أن كلفة الغرام الواحد من A هو 15000 دينار، وكلفة الغرام الواحد من B هو 10000 دينار، ترغب الشركة في معرفة عدد الوحدات التي يجب شراءها من كل عنصر لجعل التكاليف أقل ما يمكن.

المطلوب: بناء نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة؟

الحل:

x_1: عدد الوحدات التي يحتويها المسكن من العنصر A.

x_2: عدد الوحدات التي يحتويها المسكن من العنصر B.

$$\text{Min } z = 15000x_1 + 10000x_2$$

$$S/C\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ 3x_1 + 6x_2 \geq 12 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$$

التمرين الثالث:

شركة elc الكهربائية لديها ثلاث مشاريع للطاقة الكهربائية تقوم بتزويد احتياجات أربع مدن، لكل خطة للطاقة الكهربائية يتم تجهيز عدد من الكيلو واط بالساعة (kwh) وفق الجدول أدناه، الذي يوضح أيضا احتياجات كل مدينة، فضلا عن تكلفة إرسال مليون كيلو واط ساعة للطاقة من المشروع إلى المدينة والمعتمد على المسافات بين المشاريع والمدن.

من \ إلى	المدينة 1	المدينة2	المدينة3	المدينة4	العرض(مليون kwh)
المشروع1	8	6	10	9	35
المشروع2	9	12	13	7	50
المشروع3	14	9	16	5	40
الطلب (مليون kwh)	45	20	30	30	

المطلوب: صياغة البرنامج الخطي للمشكلة.

الحل:

x_{ij}: عدد (بالمليون) كيلو واط المنتجة في المشروع i والمنقولة الى المدينة j.

$$\begin{aligned}\text{Min } z = {} & 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 9x_{14} + 9x_{21} + 12x_{22} + 13x_{23} + 7x_{24} \\ & + 14x_{31} + 9x_{32} + 16x_{33} + 5x_{34}\end{aligned}$$

قيود العرض:

$$s/c \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 35 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 50 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 40 \end{cases}$$

قيود الطلب:

$$s/c \begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 45 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 20 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 30 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 30 \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1,2,3 \; ; \; j = 1,2,3,4)$$

تمارين للحل:

التمرين الأول:

يقدم أحد المطاعم إلى زبائنه طبق مكون من ثلاث أنواع من الأسماك (C,B,A)، لدى المطعم خيارين: الخيار الأول هو تقديم طبق ثمنه 10 وحدات نقدية، ويحتوي على 5 وحدات من A و4 وحدات من B و3 وحدات من C، أما الخيار الثاني فهو تقديم طبق ثمنه 8 وحدات نقدية، ويحتوي على 6 وحدات من A و4 وحدات من B و4 وحدات من C، الكميات القصوى من الأنواع الثلاثة من الأسماك التي يستطيع المطعم توفيرها هي: 40 وحدة من A، 25 وحدة من B، 15 وحدة من C.

المطلوب: تكوين البرنامج الخطي الذي يسمح للمطعم بتعظيم مبيعاته في حدود الإمكانيات المتاحة لديه.

التمرين الثاني:

تنتج مؤسسة سلعة والتي يجب أن تزن 150 كلغ تماما، يستخدم في صنعها المادتين A وB، المادة A تكلفتها 200 دج للوحدة، والمادة B تكلفتها 800 دج للوحدة، إن كل وحدة من A تزن 5 كلغ، وكل وحدة من B تزن 10كلغ، لا بد من استخدام 14 وحدة من B على الأقل، و20 وحدة من A على الأكثر.

المطلوب: كتابة البرنامج الخطي للمسألة الذي يسمح بتخفيض التكلفة إلى حدها الأدنى.

التمرين الثالث:

تريد إحدى المؤسسات المتخصصة في إنتاج الأجهزة الكهربائية إنتاج نوعين من المنتجات A وB، وذلك من خلال استغلال الطاقة التشغيلية المتاحة لثلاث أنواع من الآلات هي الآلة 1، الآلة 2، الآلة3.

يحتاج المنتج A إلى 55 دقيقة في الآلة 1، و120 دقيقة في الآلة 2، و40 دقيقة في الآلة3، في حين يحتاج المنتج B إلى 150 دقيقة في الآلة 1، و90 دقيقة في الآلة 2، و45 دقيقة في الآلة3، علما بأن عدد ساعات التشغيل المتاحة أسبوعيا كانت 75 ساعة للآلة1، 60 ساعة للآلة 2، 50 ساعة للآلة3، وأن الربح المتوقع من بيع الوحدة الواحدة من المنتج A بلغ 90 وحدة نقدية، والربح المتوقع من بيع الوحدة الواحدة من المنتج B بلغ 100 وحدة نقدية.

المطلوب: تكوين البرنامج الخطي لإنتاج عدد الوحدات من المنتجين بما يحقق للمؤسسة أكبر قدر ممكن من الأرباح.

التمرين الرابع:

طلبت تعاونية فلاحية من إحدى المزارع المنتجة للأعلاف الحيوانية أن تزودها بعلف الأبقار، يحتوي القنطار الواحد منه على الأقل على 30% من البروتين، و6% من الدهون.

من أجل تلبية هذا الطلب تقوم المزرعة بشراء ثلاث منتجات فلاحية (الشعير، نبات الصويا والذرة)، ومزجها بطريقة معينة من أجل الحصول على العلف المذكور، ثمن شراء القنطار الواحد من الشعير، الصويا والذرة هو على التوالي: 20 ون، 30 ون، 25 ون، نسب العناصر الغذائية في المنتجات الفلاحية الثلاث معطاة كمايلي:

العناصر الغذائية	الشعير	نبات الصويا	الذرة
البروتين	%14	%55	%45
الدهون	%4	%5	%15

المطلوب: تكوين البرنامج الخطي الذي يسمح للمزرعة بتلبية طلب الزبون بأقل تكلفة.

المحور الثاني

طرق حل البرنامج الخطي

المحور الثاني: طرق حل البرنامج الخطي.

تمهيد:

نعني بحل البرنامج الخطي إيجاد قيم المتغيرات التي تجعل دالة الهدف في أمثل قيمة لها دون تجاوز حدود القيود، سواءا كانت دالة الهدف في حالة تعظيم أو في حالة تدنئة، يمكن إيجاد حل للبرنامج الخطي بالطريقة البيانية، وهي شائعة الاستعمال فقط في البرامج التي تحتوي على متغيرين، لكن عمليا يكون عدد المتغيرات أكبر، خاصة في البرامج المتعلقة بالعمليات الإنتاجية أين يكون عدد المتغيرات كبير جدا، لهذا فان استعمال الطريقة البيانية للحل يكون غير ممكنا، وعليه يتم استخدام طريقة السمبلكس (طريقة الجداول)، وهي طريقة عامة تستخدم مهما كان عدد متغيرات البرنامج الخطي، وسوف نتطرق إلى الطريقتين معا من خلال هذا المحور.

أولا: الطريقة البيانية:

كما سبقت الإشارة يتم استعمال الرسم البياني لحل مسائل البرمجة الخطية التي تحتوي على متغيرين فقط، أما بالنسبة للبرامج التي يتجاوز فيها عدد المتغيرات اثنين فالحل بيانيا يكون غير تطبيقيا، وتعد الطريقة البيانية من أسهل الطرق إلا أنها غير كفؤة في معالجة مشاكل البرمجة الخطية في الحياة العملية.

أ- خطوات حل البرنامج الخطي: لحل نموذج البرمجة الخطية بالطريقة البيانية نتبع الخطوات التالية:

1- نحول كل متراجحات القيود إلى معادلات، عملية التحويل تجعل القيد في صيغة يمكن تمثيلها بخط مستقيم.

2- رسم المحاور الممثلة لمتغيرات المشكلة وتسميتها، أي المحور الأفقي x_1 والمحور العمودي x_2.

3- نرسم جميع الخطوط المستقيمة الممثلة لجميع القيود، يتم ذلك بمعرفة نقاط تقاطع الخطوط المستقيمة مع المحور x_2 حيث نفرض أن $x_1=0$، ثم يتم تعويضها في المعادلات وإيجاد قيمة x_2، ولمعرفة نقاط تقاطع الخطوط المستقيمة مع المحور x_1 نفرض أن $x_2=0$ ثم يتم حل المعادلة بالنسبة لـx_1 ، ويتم بذلك تحديد نقاط التقاطع على المحورين x_2,x_1، ثم نصل بينهما بخط مستقيم.

4- تحديد منطقة حل كل قيد، حيث نشطب المناطق التي لا تحقق القيود، وهي توجد إلى يمين المستقيم في حالة كون القيد أقل من وإلى يساره في حالة القيد أكبر من، وبشكل أدق يمكن اختبار نقطة المبدأ $(0،0)$ وتحديد إن كانت هذه النقطة ضمن المساحة التي تحقق القيد أم لا.

5- تحديد منطقة الحل الممكن، وهي منطقة تقاطع مناطق الحل والتي تقع ضمنها جميع النقاط التي تحقق جميع القيود في آن واحد، وهي في الغالب تشكل مضلعا متعدد الرؤوس، كما أن شرط عدم السالبية يحدد منطقة الحل في الربع الأول، مع ملاحظة أنه:[19]

- إذا كانت علاقات القيود من نوع أصغر أو يساوي ($\leq$)، وهي في الغالب مترافقة مع مسائل البرمجة الخطية التي يكون هدفها التعظيم، فإن منطقة الحل الممكن يجب أن تكون محدودة من اليمين وباتجاه نقطة الأصل، وبالتالي فهي تأخذ شكل المضلع، والحل الأمثل يقع على أحد نقاط زوايا هذا المضلع الأبعد عن نقطة الأصل.
- إذا كانت علاقات القيود من نوع أكبر أو يساوي ($\geq$)، وهي في الغالب مترافقة مع مسائل البرمجة الخطية التي يكون هدفها التصغير، فإن منطقة الحل الممكن تقع خارج المضلع بدلا من أن تقع داخله، أي أن منطقة الحل الأمثل تكون غير محدودة من اليمين ، ونقطة الحل الأمثل هي الأقرب إلى نقطة الأصل.
- إذا كانت علاقات القيود في المشكلة خليط من ($\geq$ ، $\leq$) معا، فإنها تكون مترافقة مع مسائل البرمجة الخطية بنوعيها التعظيم والتصغير، ولهذه الحالة منطقة حل ممكنة على شكل مضلع .
- إذا كانت علاقات القيود في المشكلة خليط من ($\geq$ ، $\leq$ ، $=$) معا، فإن الاحتمالات المرجحة هي وجود قيود تشتمل على متغير واحد بعلاقات مختلطة من ($\geq$ ، $\leq$)، وقيد آخر يشتمل على متغيرين بعلاقة مساواة، وفي مثل هذه الحالة ليس للمشكلة منطقة حل ممكنة، وإنما نقاط حل ممكنة. أو وجود قيود تشتمل على أكثر من متغير واحد بعلاقات مختلطة من ($\geq$ ، $\leq$)، وقيد آخر يشتمل على متغيرين بعلاقة مساواة، وفي مثل هذه الحالة فإن للمشكلة منطقة حل ممكنة.

6- نجعل دالة الهدف معدومة ونرسم مستقيمها بحيث يمر من نقطة المبدأ، نسمي هذا المستقيم (Δ)، نحركه بشكل موازي باتجاه رؤوس المضلع وتكون النقطة التي تحقق أكبر قيمة لدالة الهدف هي آخر نقطة يصل إليها المستقيم (Δ)، أي عندما يمس الحلول الممكنة من الأعلى، وفي هذه

[19] – أكرم محمد عرفان المهتدي، مرجع سبق ذكره، ص23.

الحالة لا نستطيع أن نرتفع أكثر لأننا نخرج من منطقة الحلول الممكنة، أما النقطة التي تحقق أقل قيمة لدالة الهدف هي أول نقطة يصل إليها المستقيم (Δ) عند تحريكه إلى الأعلى بشكل موازي لأصله.

7- خوفا من عدم تمييز نقطة الحل الأمثل بهذه الطريقة بسبب وجود عدد من النقاط المتجاورة أو المتوازية التي يقترب منها المستقيم (Δ)، نوجد الإحداثيات (x_2,x_1) لكل نقطة من نقاط منطقة الحل الممكن (مع إيجاد الحل المشترك لمعادلات المستقيمات المتقاطعة)، ونعوضها في دالة الهدف.

8- نحدد نقطة الحل الأمثل، وهي النقطة التي تكون عندها قيمة دالة الهدف أكبر ما يمكن في حالة التعظيم، أو النقطة التي تكون قيمة دالة الهدف عندها أقل ما يمكن في حالة التصغير.

مثال01: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي باستخدام الطريقة البيانية.

$$\text{Max } z = 40\text{x}_1 + 50\text{x}_2$$

$$S/C \begin{cases} 3\text{X}_1 + \text{X}_2 \leq 15 \\ \text{X}_1 + 2\text{X}_2 \leq 12 \end{cases}$$

$$\text{x}_1 \geq 0 \quad , \quad \text{x}_2 \geq 0$$

الحل:

نطبق الخطوات التالية للوصول إلى الحل الأمثل:

1- تحويل المتراجحات إلى معادلات.

$$\begin{array}{ll} 3\text{X}_1 + \text{X}_2 = 15 & \qquad (1) \\ \text{X}_1 + 2\text{X}_2 = 12 & \qquad (2) \end{array}$$

2- تحديد نقاط تقاطع المعادلتين (1) و (2) مع المحورين (x_1) و(x_2)، ثم نصل بينهما بخط مستقيم لنحصل على الشكل اللاحق.

المستقيم 1

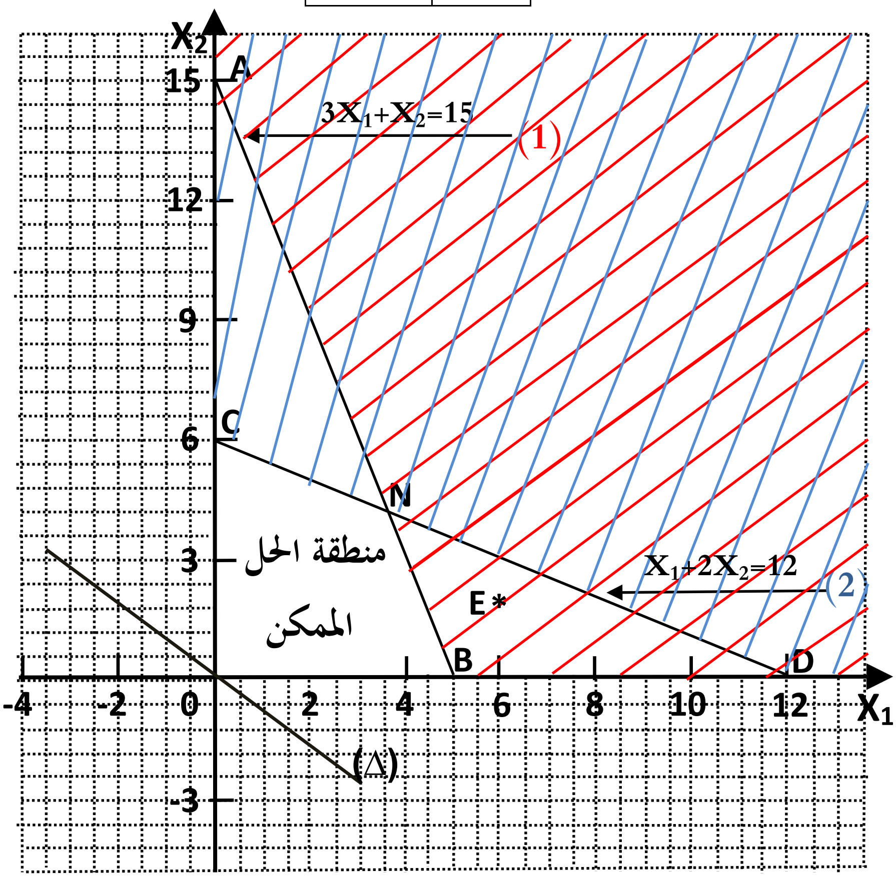
$3X_1 + X_2 = 15$		
x_1	x_2	النقاط
0	**15**	**A(0,15)**
5	**0**	**B (5,0)**

المستقيم 2

$X_1 + 2X_2 = 12$		
x_1	x_2	النقاط
0	**6**	**C(0,6)**
12	**0**	**D (12,0)**

3- على نفس المعلم نرسم المستقيم (Δ) وهو المستقيم المحصل عليه عند وضع الدالة الاقتصادية في أدنى قيمة لها وهي $z = 0$ أي: $z=40x_1+50x_2 =0$، المستقيم (Δ) يمر من النقطتين:

$40x_1+50x_2=0$	
x_1	x_2
2.5	−2
−2.5	2



4- نشطب المناطق التي لا تحقق جميع القيود كما يظهر في الشكل، إن المنطقة غير المشطبة تمثل منطقة الحل الممكن وهي تمثل المضلع OBNC، من خلال الشكل نلاحظ أن أية نقطة تقع على يسار

المستقيم 01 تحقق القيد، فلو أخذنا نقطة المبدأ O(0,0) لوجدنا أن: $3(0)+0 < 15$، هذا يعني أن أية نقطة تقع على يمين المستقيم 01 لا تحقق القيد، يمكن إثبات ذلك بتعويض إحداثيات النقطة E في القيد حيث: $x_1 = 6$ و $x_2 = 2$ فنجد أن : $3(6)+2>15$.

بتطبيق نفس المبدأ نجد أن كل النقاط الموجودة على يمين المستقيمين 1 و 2 لا تحقق القيدين، بينما كل النقاط الموجودة على يسار المستقيمين تحقق القيدين، كما أن قيد عدم السالبية يجعل كل المناطق التي هي أدنى من المحور (x_1)، وكل المناطق التي تقع على يسار المحور(x_2) مرفوضة.

5- تحديد الحل الأمثل الذي يقع على أحد نقاط زوايا المضلع OBNC، نلاحظ أن قيم إحداثيات النقاط O،B،C معروفة، أما النقطة N وهي النقطة المتولدة من تقاطع مستقيم 1 مع المستقيم 2، فلا يمكن تقدير قيم إحداثياتها من الشكل، ويتم إيجادها من خلال حل معادلتي المستقيمين المتقاطعين حلا مشتركا كما يلي:

$$\begin{aligned} 3X_1 + X_2 &= 15 \qquad (1) \\ X_1 + 2X_2 &= 12 \qquad (2) \end{aligned}$$

نضرب المعادلة (2) في 3- ونجمع المعادلتين للتخلص من أحد المتغيرات كما يلي:

$$\begin{array}{r} 3X_1 + \ X_2 \ = \ \ 15 \\ -3X_1 - 6X_2 = -36 \\ \hline 0X_1 - \ 5X_2 = -21 \end{array}$$

$$x_2 = \frac{-21}{-5} = 4.2$$

نعوض قيمة X_2 في إحدى المعادلتين نجد قيمة X_1 :

$$X_1 + 2(4.2) = 12$$

$$X_1 = 12 - 8.4$$

$$X_1 = 3.6$$

يمكن التحقق من أن إحداثيات هذه النقطة تحقق جميع القيود:

القيد الأول: $3(3.6)+4.2=15$ قيد محقق تماما.

القيد الثاني: $3.6+2(4.2)=12$ قيد محقق تماما.

6- نعوض إحداثيات النقاط O، B، N، C في دالة الهدف ثم نختار النقطة التي تحقق أكبر قيمة لها.

النقاط	قيمة إحداثيات النقاط		قيمة دالة الهدف
	X_1	X_2	$z = 40x_1 + 50x_2$
O	0	0	0
B	5	0	200
N	**3.6**	**4.2**	**354**
C	0	6	300

بمقارنة البدائل الأربعة نجد أن البديل الأفضل هو النقطة **N** حيث تعطي أكبر قيمة للدالة الاقتصادية وتحقق في نفس الوقت القيدين معا، نحصل على نفس النتيجة عند تحريك المستقيم (Δ) إلى الأعلى، فآخر نقطة يصل إليها في منطقة الحل الممكن هي النقطة **N** وهي تشكل نقطة الحل الأمثل للمسألة.

مثال02:

أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي باستخدام الطريقة البيانية.

$$\min z = x_1 + x_2$$

$$S/C\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 12 \\ 5x_1 + 8x_2 \geq 74 \\ x_1 + 6x_2 \geq 24 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$$

الحل:

نطبق نفس الخطوات كما في المثال السابق للوصول إلى الحل الأمثل:

1- نحول المتراجحات إلى معادلات ثم نحدد نقاط تقاطعها مع المحورين (x_1) و(x_2).

المستقيم1

$2X_1 + X_2 = 12$		
x_1	x_2	النقاط
0	12	A(0,12)
6	0	B (6,0)

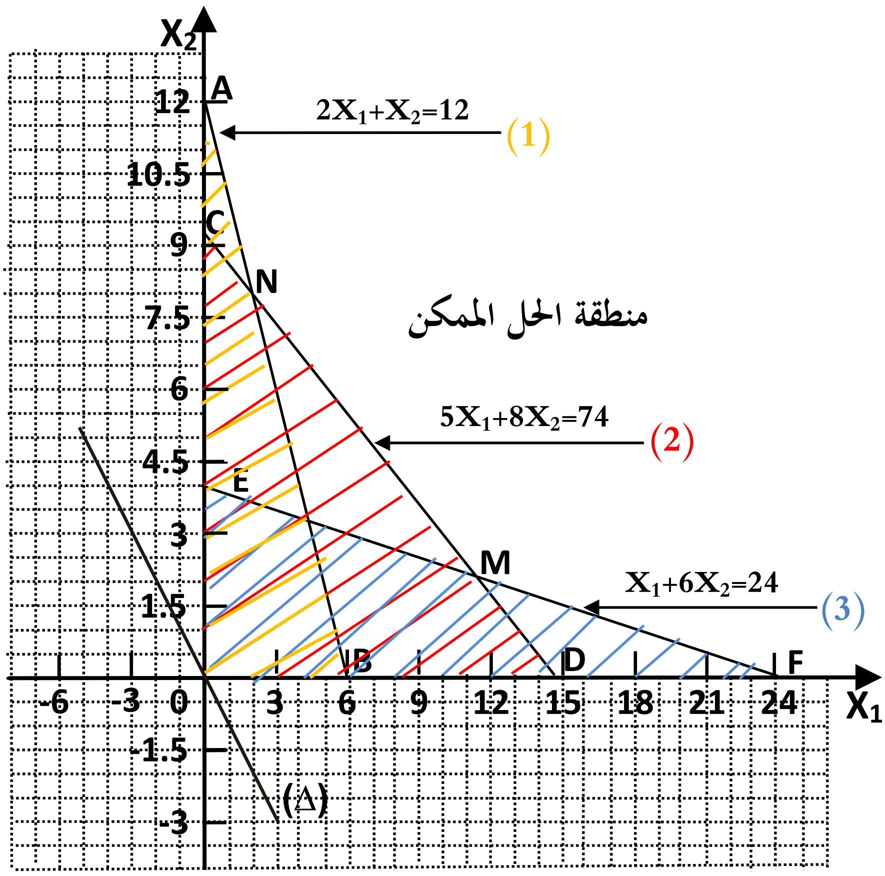
المستقيم 2

$5X_1 + 8X_2 = 74$		
x_1	x_2	النقاط
0	9.25	C(0,9.25)
14.8	0	D (14.8,0)

المستقيم3

$X_1 + 6X_2 = 24$		
x_1	x_2	النقاط
0	4	E(0,4)
24	0	F (24,0)

2- نرسم هذه المستقيمات على معلم متعامد ومتجانس، ثم نحدد منطقة الحل الممكن وهي المنطقة غير المشطبة كما يوضحه الشكل أدناه، إن أي نقطة تقع على يسار المستقيمات الثلاث لا تحقق القيود، يمكن التأكد من ذلك بتعويض إحداثيات نقطة المبدأ في القيد الأول فنجد أن: $2(0)+0>12$ ، إذن القيد غير محقق، وبتعويض نقطة المبدأ نجد أنها لا تحقق القيدين الثاني والثالث، وعليه فإن جميع النقاط التي تقع على يسار المستقيمات الثلاث لا تحقق القيود، بينما كل النقاط الموجودة على يمينها تحقق القيود، كما أن قيد عدم السالبية يجعل كل المناطق التي هي أدنى من المحور (x_1)، وكل المناطق التي تقع على يسار المحور(x_2) مرفوضة.



3- تحددت منطقة الحل الممكن بالمنطقة البعيدة عن نقطة الأصل، لأن المتراجحات من نوع أكبر أو يساوي، إذن الحل الأمثل يقع على الحدود الداخلية لهذه المنطقة والتي يمكن تحديدها بالنقاط ANMF، حيث قيم إحداثيات النقطتين F،A معروفة، أما النقطتين N و M فلا يمكن تقدير قيم إحداثياتها من الشكل، ويتم إيجادها من خلال حل معادلتي المستقيمين المتقاطعين حلا مشتركا كما يلي:

–النقطة N متولدة من تقاطع مستقيمي القيدين الأول والثاني:

$$2X_1 + X_2 = 12 \qquad (1)$$
$$5X_1 + 8X_2 = 74 \qquad (2)$$

نضرب المعادلة (1) في 8- ونجمع المعادلتين للتخلص من أحد المتغيرات كما يلي:

$$\begin{array}{l} -16X_1 - 8X_2 = -96 \\ \ \ 5X_1 + 8X_2 = 74 \\ \hline -11\,X_1 \qquad\ = -22 \end{array}$$

$$x_1 = 2$$

نعوض قيمة X_1 في إحدى المعادلتين (1) أو (2) نجد قيمة X_2 :

$$2(2) + X_2 = 12$$

$$X_2 = 8$$

– النقطة M متولدة من تقاطع مستقيمي القيدين الثاني والثالث:

$$5X_1 + 8X_2 = 74 \qquad (2)$$
$$X_1 + 6X_2 = 24 \qquad (3)$$

نضرب المعادلة (3) في 5- ونجمع المعادلتين للتخلص من أحد المتغيرات كما يلي:

$$\begin{array}{l} \ \ 5X_1 + 8X_2 = 74 \\ -5X_1 - 30X_2 = -120 \\ \hline \qquad -22\,X_2 = -46 \end{array}$$

$$x_2 = 2.09$$

نعوض قيمة X_2 في إحدى المعادلتين (2) أو (3) نجد قيمة X_2 :

$$X_1 + 6(2.09) = 24$$

$$X_1 = 11.46$$

4- نعوض إحداثيات النقاط A، N، M، D في دالة الهدف للتوصل إلى الحل الأمثل مثلما يوضحه الجدول التالي:

النقاط	قيمة إحداثيات النقاط		قيمة دالة الهدف
	X_1	X_2	$z = x_1 + x_2$
A	0	12	12
N	**2**	**8**	**10**
M	11.46	2.09	13.55
D	24	0	24

يتحقق الحل الأمثل عند النقطة N لأنها تحقق أدنى قيمة لدالة الهدف، نفس النتيجة تم التوصل إليها عند تحريك المستقيم (Δ) إلى الأعلى، حيث أن أول نقطة وصل إليها في منطقة الحل الممكن هي النقطة N.

ب-الحالات الخاصة في الحل البياني.

إن مشكلات البرمجة الخطية بصورة عامة يمكن تطبيقها في مجالات واسعة وبنجاح، إلا أن هناك حالات خاصة يمكن أن تحدث عند استخدام الطريقة البيانية في حل مشاكل البرمجة الخطية وهي:

1- **عدم وجود حل**: تعني هذه الحالة عدم وجود حل لمشكلة البرمجة الخطية بشكل يفي بكل متطلبات القيود، ويعني هذا بيانيا عدم وجود منطقة حل ممكنة، وتحدث هذه الحالة إذا كانت المشكلة تضم قيودا متعارضة[20].

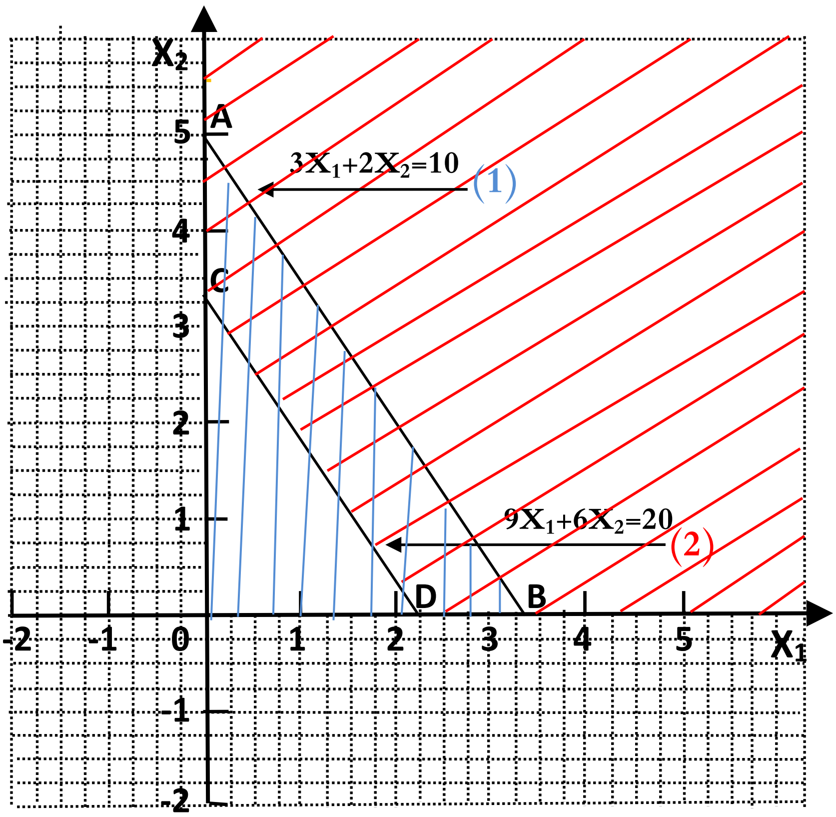
[20]- جهاد صباح بني هاني وآخرون، ، مرجع سبق ذكره، ص51.

مثال:

$$\text{MAX } z = 20X_1 + 4X_2$$

$$S/C \begin{cases} 3X_1 + 2X_2 \geq 10 \\ 9X_1 + 6X_2 \leq 20 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$$



نلاحظ من خلال الشكل أن القيدين متعاكسين، ولا يوجد منطقة حل مشتركة بين القيدين، وهذا يعني تعذر الوصول إلى حل لهذه المشكل.

2- **عدم محدودية الحل**: هناك حالات في البرمجة الخطية لا يكون فيها للحل حدود ، وتكون هذه الحالة مرافقة لمشاكل التعظيم، مما يعني أن زيادة الموارد المتاحة لواحد أو أكثر من قيود المشكلة سوف يؤدي إلى زيادة الأرباح بدون حدود وبدون تأثير على قيود المشكلة، وتمتد منطقة الحل إلى ما لا نهاية إلى الجهة اليمنى[21]، هذا ما يجعل دالة الهدف تأخذ قيمة لا نهائية ولا يمكن حينئذ تعيين حل نهائي ومحدد للدالة.

---

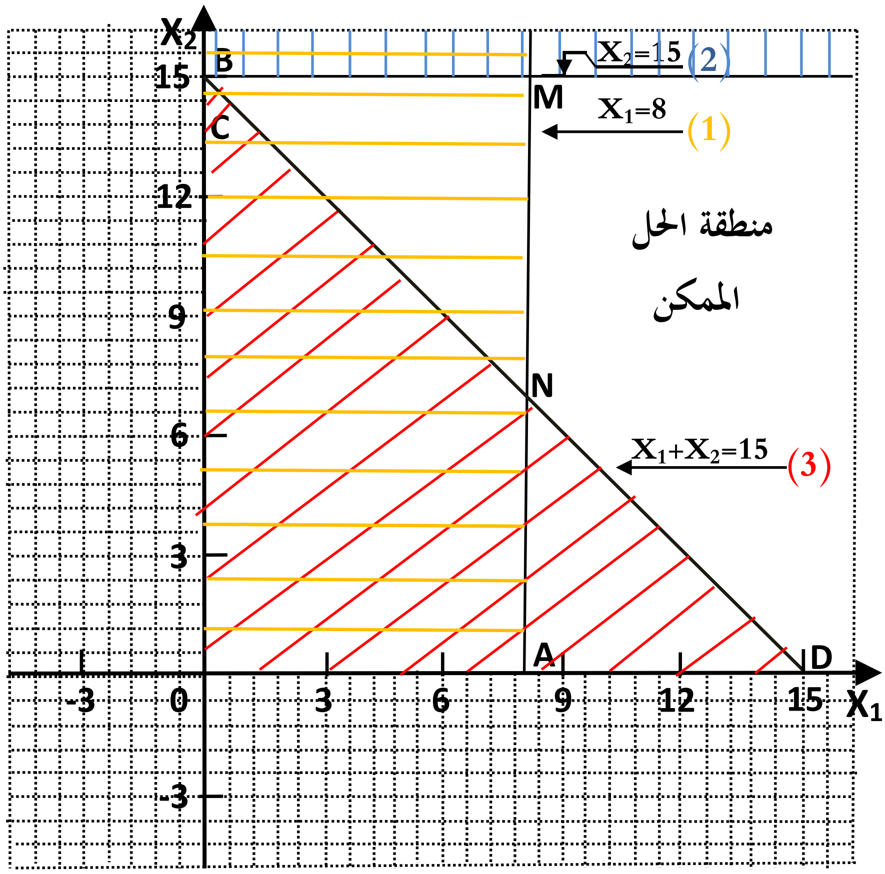
[21]-حسين محمود الجنابي، **الأحدث في بحوث العمليات**، دار الحامد، الأردن، 2010، ص61.

مثال:

$$\text{Max } z = 5x_1 + 8x_2$$

$$S/C \begin{cases} x_1 \geq 8 \\ x_2 \leq 15 \\ x_1 + x_2 \geq 15 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$$



نلاحظ من خلال الشكل البياني أنه توجد منطقة لا نهائية للحلول، أي أن منطقة الحل مفتوحة من النهاية وهذا يعني عدم وجود قيود على الحل.

3– **تعدد الحلول المثلى:** في هذه الحالة يكون للبرنامج الخطي أكثر من حل أمثل، يعود السبب في أن دالة الهدف تكون موازية لأحد القيود الهيكلية، أي عند رسم دالة الهدف وتحريك مستقيمها ينطبق في إحدى أوضاعه على أحد المستقيمات، أي لهما نفس الميل[22]، كما يوضحه المثال التالي:

[22]–دلال صادق الجواد، حميد ناصر القتال، **بحوث العمليات**، دار اليازوري العلمية، الأردن، 2008، ص39.

$$\text{Max } z = 3x_1 + 2x_2$$

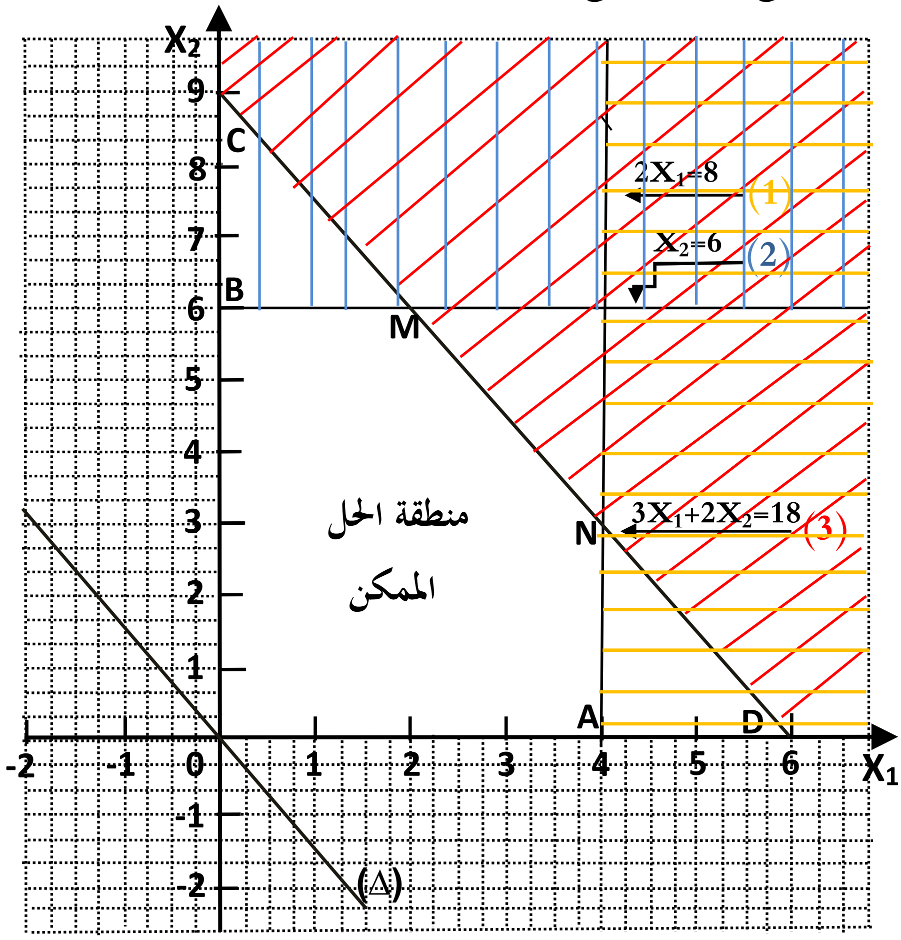
$$S/C \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ 2x_1 \leq 8 \\ x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$$

لتمثيل المشكلة بيانيا يتم تحويل القيود إلى معادلات كما يلي:

$$3x_1 + 2x_2 = 18$$
$$2x_1 = 8$$
$$x_2 = 6$$

بعد إيجاد تقاطع المستقيمات مع المحاور كما في المثالين السابقين نحصل على الشكل أدناه.



يلاحظ من خلال الشكل أن منطقة الحل الممكن هي المنطقة OCNMD والتي تقع ضمنها جميع النقاط التي تحقق القيود في آن واحد، إحداثيات النقاط O,C,D معروفة، أما النقطتين N و M واللتان تمثلان

نقطتي تقاطع المستقيم 1 مع المستقيم 2 والمستقيم 1 مع المستقيم 3 على التوالي، فبعد القيام بالحل الجبري للمعادلات حلا مشتركا نحصل على:

-إحداثيات النقطة N هي: $x_1 = 4$, $x_2 = 3$.

- إحداثيات النقطة M هي: $x_1 = 2$, $x_2 = 6$.

يتم تحديد الحل الأمثل بتعويض كل من الحلول السابقة في دالة الهدف فنجد:

النقاط	قيمة إحداثيات النقاط		قيمة دالة الهدف
	X_1	X_2	$z = 3x_1 + 2x_2$
O	0	0	0
C	4	0	12
N	**4**	**3**	**18**
M	**2**	**6**	**18**
D	0	6	12

يتضح من الجدول أن الحل الأمثل يتحقق عند النقطتين N و M حيث أعطيتا نفس القيمة لدالة الهدف، هذا يعني أن جميع النقاط التي تقع على طول القطعة [NM] تعطي نفس القيمة لدالة الهدف $z = 18$، فلو افترضنا مثلا أن النقطة E تقع على القطعة [NM] حيث إحداثياتها هي: $x_1 = 3$, $x_2 = 4.5$ ، فإن قيمة دالة الهدف $z = 3(3) + 2(4.5) = 18$ ، إذن توفر هذه الحالة للمسير مرونة أكبر في اتخاذ القرار لوجود بدائل عديدة.

4– حياد أحد القيود: في هذه الحالة يظهر أحد القيود كقيد فائض ليس له أي تأثير على الحل، وهي مشكلة شائعة في مشاكل البرمجة الخطية ذات القيود الكثيرة، بمعنى آخر هناك قيود أكثر أهمية من غيرها، لذلك فإن استخدام الأهم يغني عن استخدام الأقل أهمية، وهناك حالة أخرى تظهر عند وجود قيدين متساويين[23]، مثال القيدين: ($3X_1 + 2X_2 \leq 20$ و $6X_1 + 4X_2 \leq 40$).

[23]–محمد أحمد الطراونة، سليمان خالد عبيدات، مرجع سبق ذكره، ص 103.

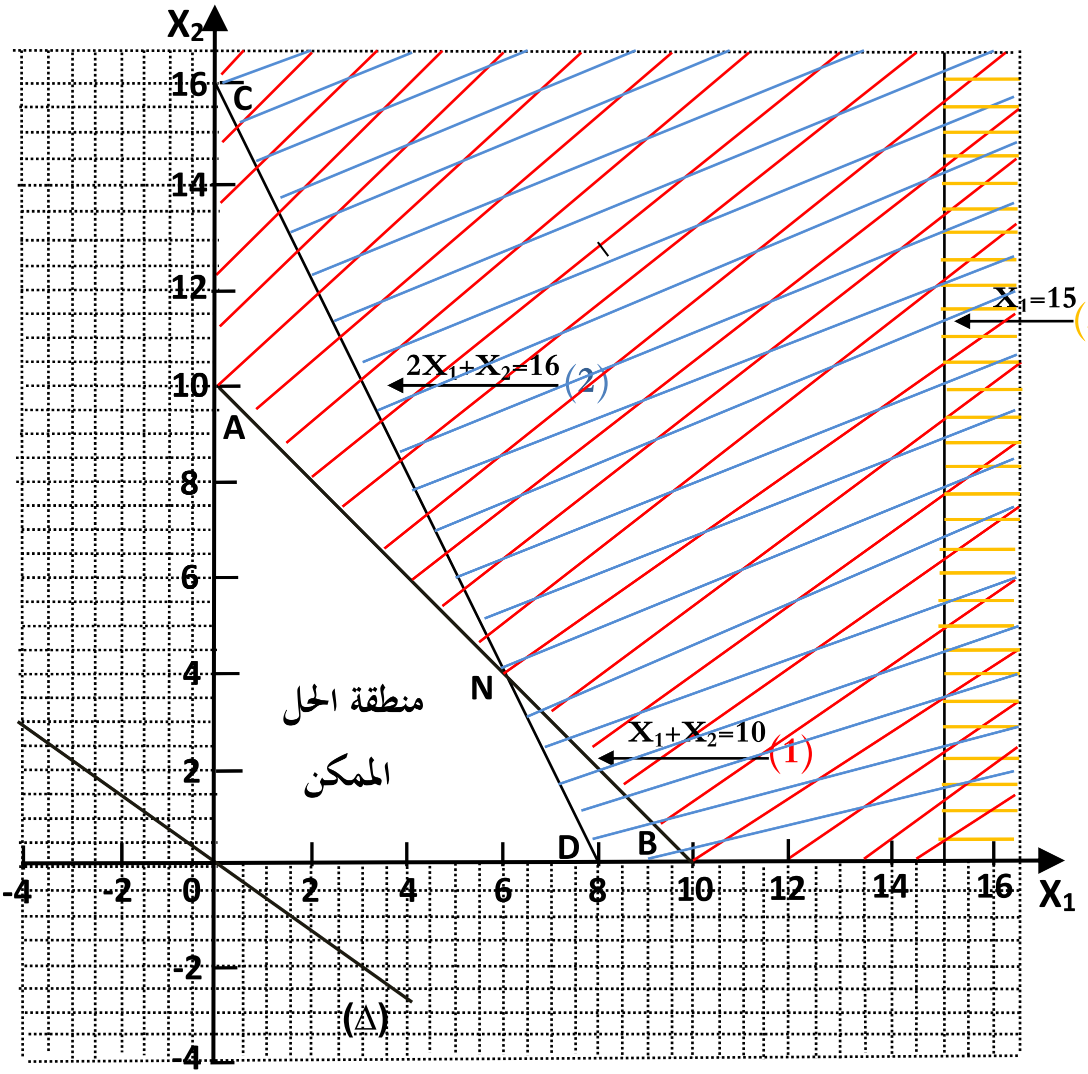
بيانيا: لا يمس القيد الفائض منطقة الحل الممكن في أي نقطة لذا يمكن حذفه من البرنامج دون أن يؤثر على الحل.

مثال:

$$\text{Max } z = 7x_1 + 10x_2$$

$$S/C \begin{cases} X_1 + X_2 \leq 10 & (1) \\ 2X_1 + X_2 \leq 16 & (2) \\ x_1 \leq 15 & (3) \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$$



نلاحظ من الشكل أن القيد الثالث فائض ولم يؤثر على منطقة الحل الممكن، حيث تحددت هذه الأخيرة بالقيدين الأول والثاني.

تمارين للحل:

باستخدام الطريقة البيانية أوجد الحل الأمثل للبرامج التالية:

$$\text{MAX } z = 100X_1 + 60X_2$$

$$S/C\begin{cases} 8X_1 + 2X_2 \leq 40 \\ 6X_1 + 9X_2 \leq 108 \\ 8X_1 + 6X_2 \leq 96 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \geq 0$$

$$\text{MIN } z = 10X_1 + 30X_2$$

$$S/C\begin{cases} 3X_1 + 2X_2 \geq 6 \\ 6X_1 + X_2 \geq 6 \\ X_2 \geq 2 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \geq 0$$

$$\text{MAX } z = 6X_1 + 10X_2$$

$$S/C\begin{cases} 2X_1 \geq 14 \\ 1/2X_2 \leq 7.5 \\ 2X_1 + 4X_2 \geq 28 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \geq 0$$

$$\text{MAX } z = 5X_1 + 3X_2$$

$$S/C\begin{cases} X_1 + X_2 \leq 30 \\ 2X_1 + X_2 \leq 40 \\ X_2 \leq 45 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \geq 0$$

$$\text{MIN} z = 20X_1 + 15X_2$$

$$S/C\begin{cases} 5X_1 + 10X_2 \leq 25 \\ 5X_1 + 10X_2 \geq 50 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \geq 0$$

$$\text{MAX } z = 6X_1 + 4X_2$$

$$S/C\begin{cases} X_1 \leq 4 \\ X_2 \leq 6 \\ 3/2X_1 + X_2 \leq 9 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \geq 0$$

ثانيا: الطريقة الجبرية.

يرجع أصل معظم الطرق المستخدمة في حل نماذج البرمجة الخطية إلى جورج داتزيغ (*george dantzig*) واستنباطاته، وقد أطلق على الطريقة التي اقترحها السمبلكس، وهي طريقة عامة لحل مشكلة البرمجة الخطية التي تمتاز بالقدرة على الوصول إلى الحل الأمثل دون الحاجة إلى دراسة جميع الحلول الممكنة، وذلك بالبدء بالحل الأساسي المسموح به ثم الانتقال باستمرار إلى حل أفضل من الحل السابق مباشرة، وتسمح طريقة السمبلكس باختصار كل خطوة عند الانتقال إلى حل جديد حتى يمكن بيان ما إذا كان من الممكن تحسين الحل أم أنه قد تم الوصول إلى الحل الأمثل، وتتسم هذه الطريقة بالمرونة حيث أنه يمكن استخدامها مهما كان عدد المتغيرات بالمشكلة خاصة بعد ظهور الحاسبات الآلية التي سهلت إجراء العمليات الحسابية المعقدة[24].

إن الوصول إلى الحل النهائي الأمثل للمشكلة المتمثلة في تعظيم الهدف أو تصغيره عند استخدام طريقة السمبلكس يتم عبر مراحل نظامية متتابعة ومتسلسلة، تبدأ بإيجاد الحل الأساسي الممكن (الحل الأولي أو الابتدائي)، ثم تحسين الحل الممكن للحصول على الحل الأفضل، ثم تحسين الحل الأفضل للحصول على الحل الأمثل.

قد يتم الوصول إلى الحل الأمثل بخطوة واحدة أو عدة خطوات، وفيما يلي شرح مفصل لحل مشكلات البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس في حالتي التعظيم أو التصغير لدالة الهدف:

أ–إيجاد الحل الأمثل عندما تكون القيود أصغر أو يساوي($\leq$):

لحل النماذج الخطية من الشكل:

$$\text{OPT }(Z) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad \leq \quad b_i \quad ; \;\; i = 1,2,\dots,m$$

$$, b_i \geq 0 \;\; x_j \geq 0$$

[24]–باديس بن يحيى بوخلوه، **الأمثلية في تسيير خزينة المؤسسة**، دار الحامد، الأردن، 2013، ص128.

أي النماذج الخطية التي تكون كل قيودها الفنية من الشكل أصغر أو يساوي يجب إتباع الخطوات التالية:

1- يتم تحويل نموذج البرمجة الخطية أعلاه إلى الشكل القياسي، أي تحويل المتراجحات إلى معادلات بإدخال متغيرات جديدة إلى النموذج نسميها متغيرات الفرق أو الفجوة أو المتغيرات الراكدة، ونرمز لها بـ s_i ، وهي تمثل الموارد العاطلة، أي الموارد التي لم تستعمل بعد، فإذا كان الطرف الأيسر من القيد الفني أصغر أو يساوي الطرف الأيمن ($\sum a_{ij}x_i \leq b_i$)، فإنه لكي يصبح الطرفان متساويان يلزم أن نضيف إلى الطرف الأيسر متغير الفرق (s_i)، أي $\sum a_{ij}x_i + s_i = b_i$، وبالتالي فإن النموذج الخطي السابق يتحول إلى الشكل التالي[25]:

$$\text{OPT } (Z) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + s_i = b_i \quad ; \quad i = 1,2,\dots,m$$

$$x_j \geq 0 \ , b_i \geq 0 \ , s_i \geq 0$$

وحتى تصبح كل المتغيرات ممثلة في جميع معادلات النموذج الخطي فإننا نضيف متغيرات الفرق بمعامل صفر إلى دالة الهدف، فهذه المتغيرات لا تضيف أي شيء إلى دالة الهدف وبالتالي فمعاملاتها فيها تساوي الصفر، لأن هذه المتغيرات غير ممثلة أصلا في دالة الهدف، وتصبح دالة الهدف كالتالي:

$$\text{OPT } (Z) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + 0s_1 + 0s_2 + \cdots + 0s_m$$

إن الشكل القياسي للمشكلة يتطلب أيضا أن يكون الجانب الأيمن من القيود موجبا أو مساويا للصفر، فإذا كان سالبا يجب تحويله إلى موجب وذلك بضرب طرفي المتراجحة في (-1)، ثم قلب اتجاه المتراجحة من أصغر أو يساوي($\leq$) إلى أكبر أو يساوي ($\geq$) أو العكس، ثم تحويلها إلى الشكل القياسي.

[25] – مكيد علي، **بحوث العمليات وتطبيقاتها الاقتصادية**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2015، ص52.

2- وضع الشكل القياسي في جدول خاص يطلق عليه جدول الحل الابتدائي (الأساسي) وهو يأخذ الشكل التالي:

الحل	متغيرات الفرق	المتغيرات غير الأساسية (متغيرات القرار)	دالة الهدف
b_i	$s_1 \quad s_2 \quad \dots \quad s_n$	$x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n$	متغيرات دالة الهدف
0	$0 \quad 0 \quad \dots \quad 0$	$c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n$	معاملات متغيرات دالة الهدف
	معاملات متغيرات القيود الفنية		متغيرات القاعدة (المتغيرات الأساسية)
b_1 b_2 $\vdots$ b_m	$1 \quad 0 \quad \dots \quad 0$ $0 \quad 1 \quad \dots \quad 0$ $\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$ $0 \quad 0 \quad \dots \quad 1$	$a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}$ $a_{21} \quad a_{22} \quad \dots \quad a_{2n}$ $\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$ $a_{m1} \quad a_{m2} \quad \dots \quad a_{mn}$	s_1 s_2 $\vdots$ s_m

يتكون جدول الحل الابتدائي من العناصر التالية:[26]

- العمود الأيسر الأول يكون للمتغيرات التي يعتمد عليها الحل لدالة الهدف، وبما أن الحل الابتدائي يفترض أن الأرباح تساوي الصفر، فإن المتغيرات التي يعتمد عليها الحل هي متغيرات الفرق.
- الصف الأفقي الأول في الأعلى يتكون من جميع المتغيرات الداخلة في النموذج.
- الصف الذي يليه يكون لدالة الهدف.
- نملأ الجدول بمعاملات المتغيرات في القيود وفي دالة الهدف.
- العمود الأخير يكون للطرف الأيمن للقيود، ويمثل الحل للنموذج أيضا.
- يضاف عمود بعد عمود الحل يسمى النسبة، نتعرف من خلاله على المتغير الخارج كما سيتم التطرق إليه لاحقا.

[26] -فتحي خليل حمدان، **بحوث العمليات مع تطبيقات باستخدام الحاسوب**، دار وائل، الأردن، 2010، ص52.

يعني الحل الابتدائي البحث عن القاعدة التي ننطلق منها في البحث عن حل أمثل، وهي تعني بالنسبة للنشاط الاقتصادي تلك المرحلة التي تكون فيها المؤسسة الاقتصادية قد أعدت كل وسائل الإنتاج المطلوبة لممارسة نشاطها، لكنها لم تبدأ بعد في ممارسة هذا النشاط، عندئذ تكون متغيرات القرار عند المستوى صفر ($x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$)، أي أننا نجعل عداد النشاط عند المستوى صفر، فإذا كانت متغيرات القرار في دالة الهدف تساوي الصفر ومعاملات متغيرات الفرق معدومة، فإن دالة الهدف في هذه الحالة تساوي صفر وهي تتناسب مع مرحلة ما قبل بداية النشاط[27]، عند جعل دالة الهدف مساوية للصفر ننقل متغيراتها إلى الطرف الأيسر، وعادة ما تكون معاملات متغيرات القرار في دالة الهدف في جدول الحل الابتدائي سالبة في حالة التعظيم وموجبة في حالة التدنئة أو التصغير.

إذا اعتبرنا أن متغيرات القرار تساوي الصفر ($x_j = 0$) ومتغيرات الفرق معاملاتها في دالة الهدف تساوي الصفر أيضا، فإن الحل الابتدائي للنموذج السابق والذي يتناسب مع مرحلة ما قبل النشاط هو $s_i = b_i$.

تعتبر عملية المباشرة في الحل ممكنة إذا استوفى جدول الحل الابتدائي مجموعة من الشروط هي:

- أن تكون دالة الهدف عند المستوى صفر وهي تتناسب مع مرحلة ما قبل بداية النشاط.
- قيم جميع متغيرات القاعدة s_i غير سالبة لأن وجود قيم سالبة يخالف شرط عدم السالبية أي $b_i \geq 0$.
- أن يكون عدد القيود مساويا لعدد متغيرات القاعدة.
- أن تشكل معاملات متغيرات القاعدة فيما بينها مصفوفة أحادية أي:

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

[27] – مكيد علي، مرجع سبق ذكره، ص ص 53-54.

3- البحث عن الحل الأمثل يتم بإدخال متغيرات القرار (x_j) الواحدة تلوى الأخرى إلى قاعدة الحل في مكان متغيرات الحل الابتدائي، ثم نرى مدى تأثيرها على تحسين دالة الهدف، يتم ذلك بإتباع الخطوات التالية:

- **تحديد المتغير الداخل:** متغير القرار الذي ندخله إلى قاعدة الحل هو المتغير الذي يكون معامله في دالة الهدف هو أكبر قيمة بالسالب في حالة التعظيم، ولدينا الخيار في حالة تساوي المعاملات، أما إذا كانت دالة الهدف من نوع تصغير فيتم إدخال المتغير الذي له أكبر قيمة موجبة في سطر دالة الهدف، ولدينا الخيار في حالة تساوي المعاملات، يسمى العمود الذي ينتمي إليه المتغير الذي يدخل إلى القاعدة بعمود المحور (pivot column).
- **تحديد المتغير الخارج:** يتم ذلك بقسمة قيم عمود الثوابت (b_i) أي الطرف الأيمن للقيود على العمود المحوري، ما عدا دالة الهدف (معاملات المتغير الداخل في القيود)، مع إهمال المتغيرات ذات القيم السالبة والصفرية في هذا العمود $(a_{ij} > 0)$، أقل قيمة من بين القيم السابقة تقابل المتغير الخارج، يسمى سطر المتغير الخارج بسطر المحور (pivot row).
- العنصر المحوري هو القيمة التي يتقاطع عندها عمود المحور مع سطر المحور.

4- جدول الحل الممكن الموالي يتم إعداده كما يلي[28]:

- نستبدل المتغيرة التي تخرج من القاعدة بالمتغيرة التي ستدخل إلى القاعدة، وذلك في عمود متغيرات القاعدة.
- تحويل العمود المحوري إلى عمود أحادي بحيث يتحول العنصر المحوري إلى القيمة 1 وعناصر العمود الأخرى إلى قيم معدومة.
- تحويل سطر المحور بتقسيم جميع عناصره على قيمة عنصر المحور، وتسمى القيم الجديدة المتولدة عن عملية القسمة بمعادلة المحور (pivot equation).
- يجري تحويل بقية العناصر في الجدول، حيث يتم استخراج القيم الجديدة للمتغيرات الأساسية $(s_1, s_2, ..., s_n)$ التي لم تخرج من القاعدة ولدالة الهدف، تتم هذه الخطوة وفق المعادلة التالية:

قيم السطر الجديدة = قيم السطر القديمة – (معامل المتغير الداخل في السطر القديم)× (معادلة المحور)

[28] – أكرم محمد عرفان المهتدي، مرجع سبق ذكره، ص 36.

- نتوصل إلى الحل الأمثل في حالة التعظيم عندما تكون كل معاملات دالة الهدف موجبة أو صفرية، وفي حالة التصغير عندما تكون كل معاملات دالة الهدف سالبة أو صفرية.

مثال:

ينتج مصنع نوعين من الأثاث، مكاتب (x_1) وطاولات (x_2)، يتطلب إنتاجهما المرور على قسمين هما قسم التجميع وقسم التجهيز النهائي، الطاقات الإنتاجية للقسمين بالساعات والساعات التي يحتاجها كل منتج في كل قسم نبينها في البرنامج التالي:

$$\text{MAX } z = 5X_1 + 6X_2$$

$$S/C \begin{cases} 3X_1 + 2X_2 \leq 320 & \text{قسم التجميع} \\ X_1 + 4X_2 \leq 340 & \text{قسم التجهيز النهائي} \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 \quad , \quad X_2 \geq 0$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل لهذا النموذج باستخدام طريقة السمبلكس.

الحل:

1- إيجاد الشكل القياسي للبرنامج كما يلي:

$$\text{MAX } Z = 5X_1 + 6X_2 + 0S_1 + 0S_2$$

$$S/C \begin{cases} 3X_1 + 2X_2 + S_1 = 320 & \text{قسم التجميع} \\ X_1 + 4X_2 + S_2 = 340 & \text{قسم التجهيز النهائي} \end{cases}$$

$$X_1, X_2 \geq 0 \quad , \quad S_1, S_2 \geq 0$$

وبجعل دالة الهدف مساوية للصفر وهي نقطة الانطلاقة دائما نحصل على الشكل التالي:

$$\text{MAX } Z - 5X_1 - 6X_2 = 0$$

2- تكوين جدول الحل الابتدائي ووضع البرنامج القياسي فيه كما يلي:

عمود المحور

عنصر المحور

سطر المحور

م/ق	X_1	X_2	S_1	S_2	b_i	النسبة $\frac{b_i}{a_{ij}}$
Z	-5	-6	0	0	0	/
S_1	3	2	1	0	320	$\frac{320}{2}=160$
S_2	1	4	0	1	340	$\frac{340}{4}=85$

يتناسب الحل الابتدائي مع مرحلة ما قبل النشاط، وبالتالي فإن متغيرات القرار المعبرة عن كميات الإنتاج X_2, X_1 تساوي الصفر، ووجود 320 في الطرف الأيمن المقابل لـ S_1 يعني أن الطاقة الإنتاجية لقسم التجميع كلها طاقة غير مستغلة، وكذلك وجود 340 في الطرف الأيمن مقابلة لـ S_2 يعني أن الطاقة الإنتاجية لقسم التجهيز النهائي أيضا غير مستغلة، ويعني وجود صفر مقابلا لـ Z أن الربح وفقا لهذا الحل سيكون صفرا.

نلاحظ أن عدد القيود يساوي عدد متغيرات القاعدة، كما أن معاملات متغيرات القاعدة في القيود تشكل مصفوفة أحادية فيما بينها.

3- البحث عن الحل الأمثل: نعين المتغير الداخل من بين المتغيرين(X_2, X_1)، نختار المتغير الذي يكون ذو أكبر معامل بالسالب من بين معاملات دالة الهدف، هذه القيمة هي (-6) وهي معامل X_2، أي أن X_2 هو عمود المحور.

بقسمة عناصر الطرف الأيمن (عمود الثوابت) على معاملات عمود المحور (X_2) نحصل على المتغير الخارج وهو يقابل أصغر قيمة مثلما يوضحه عمود النسبة في جدول الحل الابتدائي، أصغر قيمة هي 85 وهي موجودة في السطر الثاني وتقابل S_2، أي أن S_2 هو السطر المحوري، تقاطع سطر المحور مع عمود المحور يعطي عنصر المحور وهو العدد 4.

4- الانتقال إلى جدول جديد: بعد إدخال X_2 إلى القاعدة مكان S_2 يجب أن نستخرج قيم المتغير الداخل X_2 (معادلة المحور)، والقيم الجديدة لكل من S_1 و Z .

قيم المتغير الداخل (معادلة المحور) نحصل عليها بقسمة سطر المحور عل عنصر المحور كما يلي:

نحصل على سطر جديد ذو قيم جديدة كما يلي:

X_2	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	85

يتحول عمود المحور إلى عمود أحادي أي أن قيمة عنصر المحور تصبح 1 بموجب التحويل أعلاه ، أما بقية عناصر العمود فتتحول إلى أصفار، ويتم ذلك بحساب قيم S_1 و Z الجديدة كما يلي:

***قيم S_1 الجديدة = قيم S_1 القديمة − (معامل المتغير الداخل X_2 في السطر S_1)× (معادلة المحور)**

$$S_1 = [\,3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 320\,] - [(2) \times (\tfrac{1}{4} \quad 1 \quad 0 \quad \tfrac{1}{4} \quad 85\,)]$$

$$S_1 = [\,\tfrac{1}{4} \quad 0 \quad 1 \quad -\tfrac{1}{2} \quad 150\,]$$

***قيم Z الجديدة = قيم Z القديمة − (معامل المتغير الداخل X_2 في السطر Z)× (معادلة المحور)**

$$Z = [\,-5 \quad -6 \quad 0 \quad 0 \quad 0\,] - [(-6) \times (\tfrac{1}{4} \quad 1 \quad 0 \quad \tfrac{1}{4} \quad 85\,)]$$

$$Z = [\,-\tfrac{7}{2} \quad 0 \quad 0 \quad \tfrac{3}{2} \quad 510\,]$$

وبعد معرفة قيم المتغير الداخل والقيم الجديدة لكل من S_1 و Z ، نضعها في الجدول التالي:

عمود المحور

عنصر المحور

سطر المحور

م/ق	X_1	X_2	S_1	S_2	الحل b_i	النسبة $\frac{b_i}{a_{ij}}$
Z	$\frac{-7}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$	510	/
S_1	$\frac{5}{2}$	0	1	$\frac{-1}{2}$	150	$\frac{150}{\frac{5}{2}} = 60$
X_2	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	85	$\frac{85}{\frac{1}{4}} = 340$

نلاحظ أن إدخال المتغير X_2 قد ساهم في تحسين قيمة دالة الهدف التي انتقلت من 0 إلى 510 وحدة نقدية أي:

$$Z = 5(0) + 6(85) = 510$$

السؤال المطروح هو هل وصلنا إلى الحل الأمثل؟

الإجابة هي لا، لوجود قيمة سالبة في سطر دالة الهدف، لأن الحل الأمثل يشترط أن تكون كافة قيم معاملات دالة الهدف موجبة أو صفرية في حالة التعظيم، ووجود قيمة سالبة يعني إمكانية زيادة قيمة دالة الهدف(الأرباح) عن طريق تحسين الحل بتكرار نفس الخطوات السابقة.

ندخل متغير القرار X_1 والذي يمثل عمود المحور مكان المتغير S_1 والذي يمثل سطر المحور، لأن له أصغر ناتج من حاصل قسمة عمود الثوابت على القيم المقابلة في عمود المحورX_2 ، عنصر المحور هو العدد $\frac{5}{2}$كما يظهر في الجدول السابق، نقوم بالعمليات اللازمة لتحويل عمود المحور إلى عمود أحادي بحيث يتحول عنصر المحور إلى القيمة1 وعناصر العمود الأخرى إلى قيم معدومة، وهذا يتطلب حساب:

*قيم المتغير الداخل (معادلة المحور) نحصل عليها بقسمة سطر المحور عل عنصر المحور $\frac{5}{2}$ فنحصل على:

X_1	1	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{-1}{5}$	60

* القيم الجديدة X_2 و Z نحسبها كما يلي:

***قيم X_2 الجديدة = قيم X_2 القديمة – (معامل المتغير الداخل X_1 في السطر X_2)× (معادلة المحور)**

$$X_2 = [\tfrac{1}{4} \quad 1 \quad 0 \quad \tfrac{1}{4} \quad 85\,] - [(\tfrac{1}{4}) \times (1 \quad 0 \quad \tfrac{2}{5} \quad -\tfrac{1}{5} \quad 60\,)]$$

$$X_2 = [\ 0 \quad 1 \quad -\tfrac{1}{10} \quad \tfrac{3}{10} \quad 70\,]$$

***قيم Z الجديدة = قيم Z القديمة – (معامل المتغير الداخل X_1 في السطر Z)× (معادلة المحور)**

$$Z = [\,-\tfrac{7}{2} \quad 0 \quad 0 \quad \tfrac{3}{2} \quad 510\,] - [(-\tfrac{7}{2}) \times ((1 \quad 0 \quad \tfrac{2}{5} \quad -\tfrac{1}{5} \quad 60\,)]$$

$$Z = [0 \quad 0 \quad \tfrac{7}{5} \quad \tfrac{4}{5} \quad 720\,]$$

ننقل القيم الجديدة في جدول جديد يظهر لنا كما يلي:

م/ق	X_1	X_2	S_1	S_2	b_i
Z	0	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{4}{5}$	720
X_1	1	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	60
X_2	0	1	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	70

نلاحظ أن كل المعاملات السالبة في دالة الهدف اختفت وبذلك نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل، المتمثل في إنتاج 70 وحدة من X_1 و60 وحدة من X_2 لتحقيق أقصى قيمة ممكنة لدالة الهدف وهي:

$$Z = 5(60) + 6(70) = 720$$

مع استغلال كلي للطاقات الإنتاجية المتاحة في قسم التجميع ($S_1 = 0$)، وقسم التجهيز النهائي $S_2 = 0$.

ب–إيجاد الحل الأمثل عندما تكون القيود من نوع تساوي (=) أو أكبر أو يساوي(≤):

تأخذ النماذج الخطية في هذه الحالة الشكل التالي:

$$\text{OPT } (Z) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (\geq , =)\ b_i \quad ; \quad i = 1,2,\dots,m$$

$$, b_i \geq 0\ x_j \geq 0$$

لدينا قيود فنية على شكل معادلات و/أو قيود فنية أخرى على شكل أكبر أو يساوي، ولتحويل النموذج أعلاه إلى الشكل القياسي، يجب أن نطرح للقيود من نوع أكبر أو يساوي من طرفها الأيسر متغيرات الفرق، أي لتحقيق المساواة ندخل متغير الفرق يرمز له بالرمز(S_i−) ويمثل الزيادة عن المستوى المطلوب، يكون معامل متغيرات الفرق في القيود الفنية أحاديا سالبا، فإذا أردنا البحث عن الحل الابتدائي الذي يتناسب مع مرحلة ما

قبل النشاط، نلاحظ أن متغيرات القاعدة لا تتوفر فيها شروط القبول لأن معاملاتها في القيود الفنية ليست أحادية موجبة وإنما أحادية سالبة، وبما أن الحل الابتدائي يتطلب أن تكون قيم x_j مساوية للصفر فإن هذا يعني أن ($-S_i = b_i$)، أي أن قيمة متغير الفرق سالبة وهذا يتنافى مع شرط عدم السالبية للمتغيرات، وبالتالي تعذر الحصول على حل ابتدائي ممكن، ومن أجل حل هذه المشكلة يتم إضافة متغيرات جديدة تسمى بالمتغيرات الاصطناعية (R_i) إلى الطرف الأيسر للقيد ، وهي متغيرات وهمية لا وجود لها في الواقع نستعملها فقط من أجل حل النموذج ثم نتخلص منها بعد الوصول إلى الحل الأمثل[29].

بالنسبة للقيود من نوع (=) فإنه لا نضيف ولا نطرح أي متغير فرق، وبما أن الحل الابتدائي يتطلب أن تكون قيم x_j معدومة فإن القيود تصبح من الشكل (b_i=0)، وهذا أمر غير مقبول أضف إلى ذلك عدم توفر الشرط المتمثل في تساوي عدد القيود مع عدد متغيرات القاعدة، وهذا يعني أن متغيرات القاعدة لا تشكل مصفوفة أحادية فيما بينها، في هذه الحالة نحتاج إلى المتغيرات الاصطناعية لبداية الحل وفقط، بمعنى أنها لا يمكن أن تبقى في جدول الحل الأمثل بقيمة موجبة، إذن ليصبح الحل الابتدائي ممكنا نضيف المتغيرات الاصطناعية إلى الطرف الأيسر للقيود من نوع أكبر أو يساوي ويساوي، حيث تمثل إنتاجا غير موجود في الأصل، أي أنه إنتاج مصطنع أو مختلق لا أصل له في الواقع، إضافة المتغيرات الاصطناعية إلى القيود يتطلب منا إضافتها إلى دالة الهدف ويتم ذلك بطريقتين:

1– طريقة M الكبيرة (BIG M):

يتم إضافة المتغيرات الاصطناعية بمعامل كبير جدا هو (**M**+) في حالة الدالة من نوع تصغير(MIN) وهذا يعني أن إنتاج المتغير الاصطناعي سوف يؤدي زيادة التكاليف بشكل كبير، أما حالة الدالة من نوع تعظيم (MAX) فيتم طرح المتغيرات الاصطناعية بمعامل **M**، وهذا يعني أن إنتاج هذا النوع المصطنع من البضاعة والذي لا أصل له في الواقع سوف يؤدي إلى خسارة بدل الربح.[30]

عند إضافة المتغيرات الاصطناعية إلى القيود الفنية سوف نتمكن من الحصول على حل جديد، يتكون من المتغيرات الاصطناعية ومتغيرات الفرق التي تكون معاملاتها فيما بينها في القيود الفنية مصفوفة أحادية، نلاحظ

---

[29]- مكيد علي، مرجع سبق ذكره، ص 72.

[30] – محمد سالم الصفدي، **بحوث العمليات تطبيق وخوارزميات**، دار وائل للنشر،الأردن، 1999، ص136.

أن المتغيرات الاصطناعية تكون إجباريا داخل القاعدة لأن كل متغيرات القاعدة يجب أن تشمل عمود يشكل أحد أعمدة المصفوفة الأحادية الواجب توفرها في جدول الحل الابتدائي، ولا شك أن السبب الرئيسي لإضافة المتغيرات الاصطناعية هو توفير هذا الشرط، وسنوضح من خلال المثال التالي خطوات الحل باستخدام طريقة **M** الكبيرة.

مثال:

أوجد الحل الأمثل للنموذج التالي باستخدام طريقة السمبلكس.

$$\text{MIN } z = 2X_1 + X_2$$

$$S/C\begin{cases} X_1 + 2X_2 \leq 3 \\ 3X_1 + X_2 = 3 \\ 4X_1 + 3X_2 \geq 6 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 \quad , \quad X_2 \geq 0$$

1– نحول النموذج إلى الشكل القياسي كما يلي:

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + S_1 = 3 \\ 3X_1 + X_2 \qquad\quad = 3 \\ 4X_1 + 3X_2 - S_3 = 6 \end{cases}$$

$$X_1, X_2 \geq 0 \quad S_1, S_3 \geq 0$$

في جدول الحل الابتدائي يفترض أن تكون z معدومة هذا يعني أن: $X_1 = X_2 = 0$ ، نلاحظ أن هذا الحل يتكون من متغيري الفرق وهما S_1 الذي معامله في القيود(+1) و S_3 الذي معامله في القيود(−1)، هذه المعاملات لا تشكل مصفوفة أحادية فيما بينها، وعليه فإن متغيرات الفرق لا تكفي لبداية الحل والسبب هو وجود قيد من نوع أكبر أو يساوي وقيد من نوع يساوي، ولتجاوز هذه المشكلة نضيف المتغيرات الاصطناعية إلى هذه القيود فتصبح بالشكل التالي:

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + S_1 = 3 \\ 3X_1 + X_2 + R_2 \qquad = 3 \\ 4X_1 + 3X_2 - S_3 + R_3 = 6 \end{cases}$$

$$X_1, X_2 \geq 0 \quad S_1, S_3 \geq 0 \qquad R_2, R_3 \geq 0$$

إن إضافة المتغيرات الاصطناعية إلى القيود الفنية يمكننا من الحصول على حل ابتدائي جديد، الذي يتكون من المتغيرات $(S_1 = 3)$، $(R_2 = 3)$، $(R_3 = 6)$، حيث أن معاملاتها في القيود الفنية تشكل مصفوفة أحادية فيما بينها، أي أن متغيرات القاعدة هي $(R_3$،R_2،$S_1)$.

بما أن دالة الهدف من نوع التصغير (MIN) فإن إضافة المتغيرات الاصطناعية إلى القيود الفنية يتطلب أن يتم إضافتها أيضا إلى دالة الهدف بمعامل كبير**M** فتصبح على الشكل التالي:

$$\text{MIN } z = 2X_1 + X_2 + 0S_1 + 0S_3 + MR_2 + MR_3$$

نستخرج قيم المتغيرات الاصطناعية R_3،R_2 من القيود ونعوضها في دالة الهدف، لأنها متغيرات القاعدة فيجب أن لا تكون في دالة الهدف، أي يجب أن تكون معاملاتها في دالة الهدف تساوي الصفر.

$$R_2 = 3 - 3X_1 - X_2$$

$$R_3 = 6 - 4X_1 - 3X_2 + S_3$$

تصبح دالة الهدف على الشكل :

$$\text{MIN } z = 2X_1 + X_2 + 0S_1 + 0S_3 + M(3 - 3X_1 - X_2) + M(6 - 4X_1 - 3X_2 + S_3)$$

وبفك الأقواس وتجميع الحدود المتشابهة تصبح دالة الهدف كما يلي:

$$\text{MIN } z = (2 - 7M)X_1 + (1 - 4M)X_2 + MS_3 + 9M$$

قيمة دالة الهدف في جدول الحل الابتدائي دائما تكون معدومة$(z = 0)$ ، وبناءا على ذلك نضع المتغيرات في طرف والثوابت في طرف آخر فنحصل على دالة الهدف في شكلها النهائي:

$$(7M - 2)X_1 + (4M - 1)X_2 - MS_3 = 9M$$

3- نكون جدول الحل الابتدائي كما يلي:

عمود المحور

عنصر المحور

سطر المحور

م/ق	X_1	X_2	S_3	S_1	R_2	R_3	الحل b_i	النسبة $\frac{b_i}{a_{ij}}$
Z	$7M-2$	$4M-1$	$-M$	0	0	0	$9M$	
S_1	1	2	0	1	0	0	3	$\frac{3}{1}=3$
R_2	3	1	0	0	1	0	3	$\frac{3}{3}=1$
R_3	4	3	-1	0	0	1	6	$\frac{6}{4}=1.5$

المتغيرة X_1 مرشحة للدخول إلى القاعدة لأنها تقابل أكبر قيمة موجبة في سطر دالة الهدف، على أساس أن **M** هي قيمة موجبة كبيرة جدا، العمود الذي تنتمي إليه X_1 هو عمود المحور.

المتغير الخارج هو الذي يقابل أصغر قيمة موجبة لحاصل قسمة عمود الثوابت b_i على العناصر المقابلة لعمود المحور وهي موجودة في السطر الثاني، أي أن المتغير الخارج هو R_2 ويسمى هذا السطر بسطر المحور، عندئذ يكون عنصر المحور هو القيمة ثلاثة، أي العنصر الذي يتقاطع عنده سطر المحور مع عمود المحور.

دخول X_1 إلى قاعدة الحل مكان R_2 يعني أن هذا المتغير يجب أن يشكل مصفوفة وحدة مع متغيرات القاعدة الأخرى ولتحقيق ذلك نجري العمليات التالية:

*قيم المتغير الداخل (معادلة المحور) نحصل عليها بقسمة سطر المحور عل عنصر المحور 3 فنحصل على:

X_1	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	1

* القيم الجديدة S_1 و R_3 و Z نحسبها كما يلي:

***قيم S_1 الجديدة = قيم S_1 القديمة − (معامل المتغير الداخل X_1 في السطر S_1)× (معادلة المحور)**

$$S_1 = [1 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 3] - \left[(1)(1 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 1\right]$$

$$S_1 = \left[0 \quad \frac{5}{3} \quad 0 \quad 1 \quad -\frac{1}{3} \quad 0 \quad 2\right]$$

قيم R_3 الجديدة = قيم R_3 القديمة – (معامل المتغير الداخل X_1 في السطر R_3)×(معادلة المحور)

$$R_3 = [4 \quad 3 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 6] - \left[(4)(1 \quad \tfrac{1}{3} \quad 0 \quad 0 \quad \tfrac{1}{3} \quad 0 \quad 1\right]$$

$$R_3 = \left[0 \quad \frac{5}{3} \quad -1 \quad 0 \quad -\frac{4}{3} \quad 1 \quad 2\right]$$

*قيم Z الجديدة = قيم Z القديمة – (معامل المتغير الداخل X_1 في السطر Z)×(معادلة المحور)

$$Z = [7M-2 \quad 4M-1 \quad -M \quad 0 \quad 0 \quad 9M] - \left[(7M-2)(1 \quad \tfrac{1}{3} \quad 0 \quad 0 \quad \tfrac{1}{3} \quad 0 \quad 1\right]$$

$$Z = \left[0 \quad \frac{-1+5M}{3} \quad -M \quad 0 \quad \frac{2-7M}{3} \quad 0 \quad 2+2M\right]$$

نحصل على الجدول التالي:

عمود المحور

عنصر المحور

سطر المحور

م/ق	X_1	X_2	S_3	S_1	R_2	R_3	الحل b_i	النسبة $\frac{b_i}{a_{ij}}$
Z	0	$\frac{-1+5M}{3}$	$-M$	0	$\frac{2-7M}{3}$	0	$2+2M$	
S_1	0	$\frac{5}{3}$	0	1	$\frac{-1}{3}$	0	2	$\frac{2}{\frac{5}{3}} = \frac{6}{5}$
X_1	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$
R_3	0	$\frac{5}{3}$	-1	0	$\frac{-4}{3}$	1	2	$\frac{2}{\frac{5}{3}} = \frac{6}{5}$

نلاحظ أن قيمة دالة الهدف قد انخفضت، وانتقلت قيمتها من $9M$ إلى $2+2M$ ، ولكننا لم نصل بعد إلى الحل الأمثل لبقاء المعاملات الموجبة في سطر دالة الهدف، أكبر هذه القيم هي معامل X_2 الذي سيدخل إلى قاعدة الحل إذن X_2 هو عمود المحور، ويخرج المتغير الذي تقابله أقل قيمة غير سالبة من حاصل قسمة عمود الثوابت b_i

على العناصر التي تقابلها في عمود المحور، حسب ما يوضحه عمود النسبة فإنه لدينا الخيار في تحديد المتغير الخارج لوجود قيمتين دنيويتين متساويتين تقابلان s_1 وR_3 ، نختار المتغيرR_3 إذن سطرR_3 هو سطر المحور، بعد ذلك نجري العمليات اللازمة لكي يشكل X_2 مصفوفة الوحدة مع بقية المتغيرات الموجودة في قاعدة الحل.

*قيم المتغير الداخل (معادلة المحور) نحصل عليها بقسمة سطر المحور على عنصر المحور $\frac{5}{3}$ فنحصل على:

X_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{5}$

* القيم الجديدة s_1 وX_1 وZ نحسبها كما يلي:

قيم S_1 الجديدة = قيم S_1 القديمة – (معامل المتغير الداخل X_2 في السطر S_1)× (معادلة المحور)

$$S_1 = \begin{bmatrix}0 & \frac{5}{3} & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 2\end{bmatrix} - \left[\left(\frac{5}{3}\right)\begin{pmatrix}0 & 1 & -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{6}{5}\end{pmatrix}\right]$$

$$S_1 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad 0]$$

***قيم X_1 الجديدة = قيم X_1 القديمة – (معامل المتغير الداخل X_2 في السطر X_1)× (معادلة المحور)**

$$X_1 = \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1\end{bmatrix} - \left[\left(\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix}0 & 1 & -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{6}{5}\end{pmatrix}\right]$$

$$X_1 = \begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}$$

***قيم Z الجديدة = قيم Z القديمة – (معامل المتغير الداخل X_2 في السطر Z)× (معادلة المحور)**

$$Z = \begin{bmatrix}0 & \frac{-1+5M}{3} & -M & 0 & \frac{2-7M}{3} & 0 & 2+2M\end{bmatrix} - \left[\left(\frac{-1+5M}{3}\right)\begin{pmatrix}0 & 1 & -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{6}{5}\end{pmatrix}\right]$$

$$Z = \begin{bmatrix}0 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5}-M & \frac{1}{5}-M & \frac{12}{5}\end{bmatrix}$$

نحصل على الجدول التالي:

م/ق	X_1	X_2	S_3	S_1	R_2	R_3	الحل b_i
Z	0	0	$-\frac{1}{5}$	0	$-M\frac{2}{5}$	$-M\frac{1}{5}$	$\frac{12}{5}$
S_1	0	0	1	1	1	-1	0
X_1	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
X_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{5}$

نلاحظ اختفاء كل القيم الموجبة في سطر دالة الهدف وتكون بذلك Z في أدنى قيمة لها وتساوي $\frac{12}{5}$ وقيم عناصر الحل الأمثل هي: $X_1 = \frac{3}{5}$، $X_2 = \frac{6}{5}$ أما بقية المتغيرات فهي معدومة.

2-طريقة المرحلتين: هناك بعض التعقيد في استخدام طريقة big M، ذلك أن على المرء أن يدخل القيمة M كرقم كبير جدا دون أن يحدد قيمته بدقة، لأن الغرض هو إدخال حد لإبعاد المتغيرات الاصطناعية، حيث لا يمكن أن تكون كجزء من الحل للمسألة الأصلية، هناك أسلوب للتغلب على هذه الصعوبة يتمثل في طريقة المرحلتين، إن المرحلة الأولى تتضمن إبعاد المتغيرات الاصطناعية لغرض استخراج حل أساسي ممكن للمتغيرات الحقيقية للمسألة، أما المرحلة الثانية فتتضمن استخدام الحل الأساسي للوصول إلى الحل الأمثل بواسطة طريقة السمبلكس، ونلاحظ أن جداول الحل المختلفة في طريقة المرحلتين تشبه تماما جداول الحل في طريقة big M باستثناء معاملات دالة الهدف[31].

يتم الحل بموجب هذه الطريقة على مرحلتين أساسيتين يمكن توضيحهما على النحو التالي:[32]

المرحلة الأولى:

1-تحويل النموذج إلى الصيغة القياسية مع إضافة المتغيرات الاصطناعية إلى النموذج.

---

[31]- محمد عبد العال النعيمي وآخرون، مرجع سبق ذكره، ص62.

[32] - حسن ياسين طعمة وآخرون، مرجع سبق ذكره، ص121.

2-صياغة دالة هدف جديدة (Γ) بالاعتماد على المتغيرات الاصطناعية فقط، وهي بهذه الكيفية تعد دالة مؤقتة وتكتب كما يلي:

*في حالة التعظيم (MAX):

$$\Gamma = -\sum_{i=1}^{n} R_i$$

*في حالة التصغير (MIN):

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

3- تكوين جدول يتضمن الحل الأولي بالاعتماد على معاملات المتغيرات القرارية والراكدة والاصطناعية في قيود النموذج، ودالة الهدف الجديدة Γ ونتبع خطوات الحل باستخدام طريقة السمبلكس إلى أن نحصل على $\Gamma =$ 0.

4-لكي يكون للبرنامج الخطي حل ممكن لابد لدالة الهدف المؤقتة Γ أن تنعدم عند نهاية المرحلة الأولى، وأن تخرج كل المتغيرات الاصطناعية من القاعدة وإن بقيت في الجدول يجب أن تكون قيمتها مساوية للصفر.

المرحلة الثانية:

1-تبدأ هذه المرحلة بالحل النهائي الذي تم التوصل إليه في المرحلة الأولى بعد استبعاد المتغيرات الاصطناعية ودالة الهدف Γ .

2- اعتماد دالة الهدف الأصلية Z وتحسين قيمتها للحصول على الحل الأمثل.

3- نتحقق من أمثلية الحل حيث تكون كافة معاملات دالة الهدف سالبة أو صفرية في حالة التصغير، وموجبة أو صفرية في حالة التعظيم.

مثال: أوجد الحل الأمثل للبرنامج السابق باستخدام طريقة المرحلتين.

الحل:

المرحلة الأولى: يمكن الوصول إلى حل النموذج في مرحلته الأولى وفقا للآتي:

– نحول النموذج إلى الشكل القياسي كما يلي:

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + S_1 = 3 \\ 3X_1 + X_2 + R_2 = 3 \\ 4X_1 + 3X_2 - S_3 + R_3 = 6 \end{cases}$$

$$X_1, X_2 \geq 0 \quad S_1, S_3 \geq 0 \quad R_2, R_3 \geq 0$$

–صياغة دالة هدف جديدة Γ بالاعتماد على قيم المتغيرات الاصطناعية R_2, R_3 فنحصل على:

$$\text{MIN} \rightarrow \Gamma = R_2 + R_3$$

نستخرج قيم المتغيرات الاصطناعية R_3،R_2 من القيود ونعوضها في دالة الهدف

$$R_2 = 3 - 3X_1 - X_2$$

$$R_3 = 6 - 4X_1 - 3X_2 + S_3$$

تصبح دالة الهدف على الشكل :

$$\Gamma = (3 - 3X_1 - X_2) + (6 - 4X_1 - 3X_2 + S_3)$$

وبفك الأقواس وتجميع الحدود المتشابهة تصبح دالة الهدف كما يلي:

$$\Gamma = -7X_1 - 4X_2 + S_3 + 9$$

نضع المتغيرات في طرف والثوابت في طرف آخر فنحصل على دالة الهدف في شكلها النهائي:

$$7X_1 + 4X_2 - S_3 = 9$$

–نكون جدول الحل الابتدائي كما يلي:

عمود المحور

عنصر المحور

سطر المحور

م/ق	X_1	X_2	S_3	S_1	R_2	R_3	الحل b_i	النسبة $\frac{b_i}{a_{ij}}$
Γ	7	4	-1	0	0	0	9	
S_1	1	2	0	1	0	0	3	$\frac{3}{1}=3$
R_2	3	1	0	0	1	0	3	$\frac{3}{3}=1$
R_3	4	3	-1	0	0	1	6	$\frac{6}{4}=1.5$

المتغيرة X_1 مرشحة للدخول إلى القاعدة لأنها تقابل أكبر قيمة موجبة في سطر دالة الهدف، العمود الذي تنتمي إليه X_1 هو عمود المحور، المتغير الخارج هو R_2 ويمثل سطر المحور، إذن عنصر المحور هو القيمة 3، وبإتباع نفس خطوات السمبلكس السابقة نقوم بإعداد جدول الحل الثاني على النحو الآتي:

عمود المحور

عنصر المحور

سطر المحور

م/ق	X_1	X_2	S_3	S_1	R_2	R_3	الحل b_i	النسبة $\frac{b_i}{a_{ij}}$
Γ	0	$\frac{5}{3}$	-1	0	$\frac{-7}{3}$	0	2	
S_1	0	$\frac{5}{3}$	0	1	$\frac{-1}{3}$	0	2	$\frac{3}{1}=3$
X_1	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{3}{3}=1$
R_3	0	$\frac{5}{3}$	-1	0	$\frac{-4}{3}$	1	2	$\frac{6}{4}=1.5$

نلاحظ أن قيمة دالة الهدف قد انخفضت، وانتقلت قيمتها من 9 إلى 2 ، ولكننا لم نصل بعد إلى الحل الأمثل لبقاء المعاملات الموجبة في سطر دالة الهدف، أكبر هذه القيم هي معامل X_2 الذي سيدخل إلى قاعدة الحل إذن X_2 هو عمود المحور، وحسب ما يوضحه عمود النسبة فإنه لدينا الخيار في تحديد المتغير الخارج لوجود قيمتين دنيويتين متساويتين تقابلان S_1 و R_3 ، وهنا **تعطى أولوية الخروج للمتغيرة الاصطناعية للاقتراب** أكثر من

الحل، إذن سطر R_3 هو سطر المحور، بعد ذلك نجري العمليات اللازمة لكي يشكل X_2 مصفوفة الوحدة مع بقية المتغيرات الموجودة في قاعدة الحل، نحصل على جدول الحل الثالث على النحو الآتي:

م/ق	X_1	X_2	S_3	S_1	R_2	R_3	الحل b_i
Γ	0	0	0	0	-1	-1	0
S_1	0	0	1	1	1	-1	0
X_1	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
X_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{5}$

نلاحظ أن كافة معاملات دالة الهدف صفرية أو سالبة، كما أن المتغير الاصطناعي R_3 خرج من قاعدة الحل، ودالة الهدف المؤقتة Γ تساوي صفر وهذا يعني الوصول إلى الحل الأمثل للمرحلة الأولى، مما يسمح بالانتقال إلى المرحلة الثانية.

المرحلة الثانية:

-نستبدل معاملات دالة الهدف المؤقتة بمعاملات دالة الهدف الأصلية، مع استبعاد المتغيرات الاصطناعية من أسطر وأعمدة الجدول .

م/ق	X_1	X_2	S_3	S_1	الحلb_i
Z	؟	؟	؟	؟	؟
S_1	0	0	1	1	0
X_1	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
X_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$

-نحصل على معاملات دالة الهدف الأصلية Z من خلال كتابة القيود اعتمادا على النتائج النهائية الواردة في الجدول السابق.

$$X_1 + \frac{1}{5}S_3 = \frac{3}{5} \dots (1)$$

$$X_2 - \frac{3}{5}S_3 = \frac{6}{5} \dots (2)$$

من المعادلتين (1) و(2) يمكن الحصول على قيم المتغيرين X_1 و X_2 كالآتي:

$$X_1 = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}S_3 \dots (3)$$

$$X_2 = \frac{6}{5} + \frac{3}{5}S_3 \dots (4)$$

بتعويض قيم المتغيرين X_1 و X_2 الواردين في العلاقتين (3) و(4) في دالة الهدف الأصلية نجد:

$$Z = 2X_1 + X_2$$

$$= 2(\frac{3}{5} - \frac{1}{5}S_3) + \frac{6}{5} + \frac{3}{5}S_3$$

$$= \frac{12}{5} + \frac{1}{5}S_3$$

$$Z - \frac{1}{5}S_3 = \frac{12}{5}$$

-نفرغ نتيجة دالة الهدف Z في جدول الحل النهائي فنحصل على:

م/ق	X_1	X_2	S_3	S_1	الحل b_i
Z	0	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{12}{5}$
S_1	0	0	1	1	0
X_1	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
X_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$

يتضح من النتائج النهائية الواردة في الجدول بأن جميع معاملات دالة الهدف Z سالبة أو صفرية ومنه نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل للبرنامج حيث: $X_1 = \frac{3}{5}$ ، $X_2 = \frac{6}{5}$ ، $S_1 = 0$، $S_3 = 0$ ، $Z = \frac{12}{5}$.

ج- عدم توفر شرط عدم سالبية المتغيرات:

يمكن أن تكون بعض المتغيرات في البرنامج الخطي غير متقيدة بشرط عدم السالبية، غير أن خوارزمية الحل بطريقة السمبلكس تشترط عدم سالبية كل المتغيرات، لذا يجب التحايل رياضيا بحيث ندخل إلى البرنامج متغيرات غير سالبة وفق المعالجات التالية[33]:

1- **إذا كان أحد المتغيرات أقل أو يساوي الصفر** $(0 \leq x_j)$: في هذه الحالة يتم إجراء تعديل على البرنامج بفرض: $x_j = -x_j'$ حيث: $x_j' \geq 0$.

يتم تعويض المتغير الجديد في البرنامج ثم نتبع خوارزمية الحل ونوجد الحل الأمثل بشكل عادي، وحينئذ نحول المتغير x_j' إلى أصله وفق التحويل الأولي.

2- **إذا كان أحد المتغيرات حرا** $(-\infty, +\infty) \in x_j$: أي يمكن أن يأخذ أي قيمة مهما كانت في الاتجاه السالب أو الموجب، في هذه الحالة يتم إجراء تعديل على البرنامج بحيث نفرض:

$x_j = x_j' - x_j''$ حيث: $x_j' \geq 0 \;,\; x_j'' \geq 0$.

أي أن x_j عبارة عن الفرق بين قيمتين موجبتين، بحيث:

- إذا كان x_j موجبا يكون: $x_j' > x_j''$.
- إذا كان x_j سالبا يكون: $x_j' < x_j''$.
- إذا كان x_j معدوما يكون: $x_j' = x_j''$.

يتم تعويض المتغير وفق التحويل الجديد في البرنامج، ثم نوجد الحل الأمثل، ونقوم بإيجاد قيمة المتغير الأصلي وفق صيغة التحويل السابقة.

[33] – راتول محمد، مرجع سبق ذكره، ص73.

مثال 1:

أوجد الحل الأمثل للبرنامج التالي باستخدام طريقة السمبلكس

$$\text{Max } z = 3X_1 + 3X_2$$

$$S/C\begin{cases} 5X_1 + 6X_2 \leq 10 \\ 2X_1 + 2X_2 \leq 14 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 \quad , \quad X_2 \leq 0$$

الحل:

بما أن X_2 سالب نفرض أن: $x_2 = -x_2'$ حيث: $x_2' \geq 0$.

بالتعويض في البرنامج نحصل على ما يلي:

$$\text{Max } z = 3X_1 - 3X_2'$$

$$S/C\begin{cases} 5X_1 - 6X_2' \leq 10 \\ 2X_1 - 2X_2' \leq 14 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 \, , X_2' \geq 0$$

الشكل القياسي للبرنامج هو:

$$\text{Max } z = 3X_1 - 3X_2' + 0S_1 + 0S_2$$

$$S/C\begin{cases} 5X_1 - 6X_2' + S_1 = 10 \\ 2X_1 - 2X_2' + S_2 = 14 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 \, , X_2' \geq 0 \quad , S_1 \geq 0 \text{ ،} S_2 \geq 0$$

وعليه يكون جدول الحل الابتدائي كما يلي:

م/ق	X_1	X'_2	S_1	S_2	b_i	النسبة
Z	-3	3	0	0	0	/
s_1	5	-6	1	0	10	$\frac{10}{5} = 2$
s_2	2	-2	0	1	6	$\frac{6}{2} = 3$

المتغير الذي سيدخل إلى القاعدة هو X_1، والذي سيخرج منها هو S_1، وجدول الحل الثاني هو:

م/ق	X_1	X'_2	S_1	S_2	b_i
Z	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	6
X_1	1	$-\frac{6}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	2
s_2	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	1	10

المتغير الذي سيدخل إلى القاعدة هو X'_2، والذي سيخرج منها هو S_2، وجدول الحل الثالث هو:

م/ق	X_1	X'_2	S_1	S_2	b_i
Z	0	0	0	$\frac{3}{5}$	21
X_1	1	0	-1	3	32
X'_2	0	1	-1	$\frac{5}{2}$	25

انتهت كل المعاملات السالبة في سطر دالة الهدف إذن الحل أمثل: $X_1 = 32$، $X'_2 = 25$، $S_1 = 0$ ، $S_2 = 0$ ، $Z = 21$ ومنه يمكن إيجاد قيمة X_2 على أساس التحويل المفترض مع بداية الحل وهو: $x_2 = -x'_2$ إذن: $X_2 = -25$.

أما دالة الهدف الأصلية فهي: $Z = 3X_1 + 3X_2$ ، بالتعويض نجد:

$Z = 3(32) + 3(-25) = 21$، أي أن قيمة دالة الهدف لم تتغير.

مثال2:

أوجد الحل الأمثل للبرنامج التالي باستخدام طريقة السمبلكس

$$\text{Max } z = 3X_1 + 10X_2$$

$$S/C \begin{cases} 5X_1 + 6X_2 \leq 10 \\ 2X_1 + 7X_2 \leq 14 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 \quad , \quad X_2 \,\forall$$

الحل:

بما أن X_2 حر نفرض أن: $x_2 = x_2' - x_2''$ حيث: $x_2', x_2'' \geq 0$.

بالتعويض في البرنامج نحصل على مايلي:

$$\text{Max } z = 3X_1 + 10(X_2' - X_2'')$$

$$S/C \begin{cases} 5X_1 + 6(X_2' - X_2'') \leq 10 \\ 2X_1 + 7(X_2' - X_2'') \leq 14 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 \, , X_2' \geq 0 \, , X_2'' \geq 0$$

الشكل القياسي للبرنامج بعد فك الأقواس هو:

$$\text{Max } z = 3X_1 + 10X_2' - 10X_2'' + 0S_1 + 0S_2$$

$$S/C \begin{cases} 5X_1 + 6X_2' - 6X_2'' + S_1 = 10 \\ 2X_1 + 7X_2' - 7X_2'' + S_2 = 14 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 \, , X_2' \geq 0 \, , X_2'' \geq 0 \, , S_1 \geq 0 \, ، S_2 \geq 0$$

وعليه يكون جدول الحل الابتدائي كما يلي:

م/ق	X_1	X_2'	X_2''	S_1	S_2	b_i	النسبة
Z	−3	−10	10	0	0	0	/
s_1	5	6	−6	1	0	10	$\frac{10}{6} = 1.66$
s_2	2	7	−7	0	1	14	$\frac{14}{7} = 2$

المتغير الذي سيدخل إلى القاعدة هوX_2'، والذي سيخرج منها هو S_1، وجدول الحل الثاني هو:

م/ق	X_1	X_2'	X_2''	S_1	S_2	b_i
Z	$\frac{16}{3}$	0	0	$\frac{10}{6}$	0	$\frac{50}{3}$
X_2'	$\frac{5}{6}$	1	−1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{10}{6}$
s_2	$\frac{23}{6}$	0	0	$-\frac{7}{6}$	1	$\frac{7}{3}$

انتهت كل المعاملات السالبة في سطر دالة الهدف ومنه الحل أمثل إذن: $X_1 = 0$ ، $X_2' = \frac{10}{6}$ ، $X_2'' = 0$ ، $S_1 = 0$، $S_2 = \frac{7}{3}$ ، $Z = \frac{50}{3}$.

وحسب معادلة التحويل المفترض مع بداية الحل وهو: $x_2 = x_2' - x_2''$ إذن: $X_2 = \frac{10}{6} - 0 = \frac{10}{6}$.

أما دالة الهدف الأصلية فهي:$Z = 3X_1 + 10X_2$، بالتعويض نجد: $Z = 3(0) + 3\left(\frac{10}{6}\right) = \frac{50}{3}$، أي أن قيمة دالة الهدف لم تتغير.

د- الحالات الخاصة:

أثناء البحث عن الحل الأمثل لمشاكل البرمجة الخطية تظهر حالات خاصة تنجم عن عدم الدقة في صياغة النماذج الرياضية أو في تحديد العوامل المؤثرة على المسألة موضوع البحث، ومن أهم هذه الحالات:

1- **عدم وجود حل:** تعني هذه الحالة عدم وجود حل لمشكلة البرمجة الخطية بشكل يفي باحتياجات جميع القيود، أي عدم وجود حل ممكن، وتحدث هذه الحالة إذا كانت مشكلة البرمجة الخطية تضم قيودا متعارضة، عند استخدام طريقة السمبلكس نصل إلى جدول الحل الأمثل حيث يكون أحد المتغيرات الاصطناعية ضمن الحل الأساسي بقيمة موجبة،[34] فقاعدة السمبلكس تشترط عند الحل الأمثل خروج كل المتغيرات الاصطناعية.

مثال:

أوجد الحل الأمثل للبرنامج التالي باستخدام طريقة السمبلكس

$$\text{MIN } z = X_2 - X_1$$

$$S/C\begin{cases} 2X_1 - X_2 \geq -2 \\ X_1 - 2X_2 \leq -8 \\ X_1 + X_2 \leq 5 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 \quad , \quad X_2 \geq 0$$

الحل:

تشترط طريقة السمبلكس أن تكون قيم عمود الثوابت موجبة، لذا نقوم بضرب القيدين الأول والثاني في (1-) قبل وضع البرنامج في شكله القياسي، بعد ذلك نجري العمليات اللازمة لنحصل على جدول الحل الابتدائي التالي:

[34] - جهاد صياح بني هاني و آخرون، مرجع سبق ذكره، ص 90.

م/ق	X_1	X_2	S_2	S_1	R_2	s_3	الحل b_i	النسبة $\frac{b_i}{a_{ij}}$
Z	$1-M$	$-1+2M$	$-M$	0	0	0	$8M$	
S_1	-2	1	0	1	0	0	2	$\frac{2}{1}=2$
R_2	-1	2	-1	0	1	0	8	$\frac{8}{2}=4$
s_3	1	1	0	0	0	1	5	$\frac{5}{1}=5$

المتغير الذي سيدخل إلى القاعدة هو X_2، والذي سيخرج منها هو S_1، وجدول الحل الثاني هو:

م/ق	X_1	X_2	S_2	S_1	R_2	s_3	الحل b_i	النسبة $\frac{b_i}{a_{ij}}$
Z	$-13M$	0	$-M$	$1-2M$	0	0	$2+4M$	
X_2	-2	1	0	1	0	0	2	/
R_2	3	0	-1	-2	1	0	4	$\frac{4}{3}=1.33$
s_3	3	0	0	-1	0	1	3	$\frac{3}{3}=1$

المتغير الذي سيدخل إلى القاعدة هو X_1، والذي سيخرج منها هو S_3، وجدول الحل الثالث هو:

م/ق	X_1	X_2	S_2	S_1	R_2	s_3	الحل b_i
Z	0	0	$\frac{2}{3}-M$	0	0	$\frac{1}{3}-M$	$3+M$
X_2	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	4
R_2	1	0	-1	-1	1	-1	1
X_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1

نلاحظ من خلال الجدول أن الحل الأمثل قد تحقق حيث أن كافة معاملات دالة الهدف موجبة أو صفرية، إلا أن هذا الحل يتضمن متغير اصطناعي R_2 في عمود الحل الأساسي بقيمة موجبة هي 1، وهذا يعني عدم وجود حل ممكن لهذه المشكلة.

2- **عدم محدودية الحل:** تحدث هذه الحالة عندما تكون دالة الهدف من نوع تعظيم، حيث يمكن زيادة أحد العوامل الداخلة في الحل بشكل غير محدود وبالتالي زيادة الأرباح إلى ما لا نهاية، إذا حدث أن واجهنا هذه الحالة في الحياة العملية فهذا يعني أن مشكلة البرمجة الخطية قد صيغت بطريقة غير مناسبة، لأنه من المستحيل عمليا زيادة الأرباح بشكل لا محدود، يستدل على عدم محدودية الحل بطريقة السمبلكس عندما يمكن تحديد المتغير الداخل ولا يمكن تحديد المتغير الخارج، بسبب أن كافة قيم العمود المحوري صفرية أو سالبة الأمر الذي يترتب عليه أن تصبح كافة قيم المتغيرات الخارجة سالبة أو غير معرفة، والتي تشترط طريقة السمبلكس إهمالهم[35].

مثال:

أوجد الحل الأمثل للبرنامج التالي باستخدام طريقة السمبلكس

$$\text{Max } z = 3X_1 + 2X_2$$

$$S/C \begin{cases} X_1 - X_2 \leq 1 \\ 3X_1 - 2X_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 \quad , \quad X_2 \geq 0$$

الحل:

جدول الحل الابتدائي هو:

م/ق	X_1	X_2	S_1	S_2	b_i	النسبة
Z	-3	-2	0	0	0	/
s_1	1	-1	1	0	1	$\frac{1}{1} = 1$
s_2	3	-2	0	1	6	$\frac{6}{3} = 2$

[35]- أكرم محمد عرفان المهتدي، مرجع سبق ذكره، ص 96.

المتغير الذي سيدخل إلى القاعدة هو X_1، والذي سيخرج منها هو S_1، وجدول الحل الثاني هو:

م/ق	X_1	X_2	S_1	S_2	b_i	النسبة
Z	0	-5	3	0	3	/
X_1	1	-1	1	0	1	تهمل
s_2	0	1	-3	1	3	$\frac{3}{1}=3$

المتغير الذي سيدخل إلى القاعدة هو X_2، والذي سيخرج منها هو S_2، وجدول الحل الثالث هو:

م/ق	X_1	X_2	S_1	S_2	b_i	النسبة
Z	0	0	-12	5	18	/
X_1	1	0	-2	1	4	تهمل
X_2	0	1	-3	1	3	تهمل

نلاحظ من خلال الجدول أن الحل الأمثل لم يتحقق بعد لوجود قيمة سالبة في سطر دالة الهدف، الأمر الذي يتطلب تحسين الحل، المتغير الداخل هو S_1 أما المتغير الخارج فلا يمكن تحديده لأن كافة قيم عمود المحور سالبة، مما يجعل حاصل قسمة قيم عمود الثوابت عليها سالبة يجب إهمالها، وهذا يعني أن البرنامج فيه عدم محدودية حل يمكن فيه تعظيم الهدف.

3– **تعدد الحلول المثلى**: عند وجود حلين أمثلين أو أكثر لمشكلة البرمجة الخطية، نقول بأن هذه المشكلة لها حلول متعددة، نستطيع التعرف على هذه الحالة عند الوصول إلى جدول الحل الأمثل، حيث تكون معاملات دالة الهدف مساوية للصفر لمتغير أو أكثر من المتغيرات غير الداخلة في قاعدة الحل

(متغيرات غير أساسية)، في هذه الحالة يمكن أن تتحول هذه المتغيرات إلى متغيرات أساسية، تكون جدولا جديدا يعطي نفس الحل الأمثل[36].

مثال:

أوجد الحل الأمثل للبرنامج التالي:

$$\text{MAX } z = 2X_1 + X_2$$

$$S/C\begin{cases} 2X_1 + X_2 \leq 10 \\ X_1 - X_2 \leq 8 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 \quad , \quad X_2 \geq 0$$

الحل:

جدول الحل الابتدائي هو:

م/ق	X_1	X_2	S_1	S_2	b_i
Z	–2	–1	0	0	0
s_1	2	1	1	0	10
s_2	1	–1	0	1	8

المتغير الذي سيدخل إلى القاعدة هو X_1، والذي سيخرج منها هو S_1، وجدول الحل الثاني هو:

م/ق	X_1	X_2	S_1	S_2	b_i
Z	0	0	1	0	10
X_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	5
s_2	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	3

[36] – محمد أحمد الطراونة، سليمان خالد عبيدات، مرجع سبق ذكره، ص 146.

نلاحظ من الجدول أن كل معاملات دالة الهدف موجبة أو صفرية وهذا يعني أن الحل أمثل.

الملاحظ كذلك أن هناك قيمة صفرية في معاملات دالة الهدف تقابل X_2 علما بأنه متغير غير أساسي، هذا يعني أن هناك أكثر من حل أمثل لهذه المشكلة، بمعنى أنه بإمكاننا إدخال X_2 إلى قاعدة الحل بحيث يعطينا نفس قيمة الحل السابق، كما يوضحه الجدول التالي:

م/ق	X_1	X_2	S_1	S_2	b_i
Z	0	0	1	1	10
X_2	2	1	1	0	10
s_2	3	0	1	1	18

نلاحظ أن كافة معاملات دالة الهدف موجبة أو صفرية وعليه فإن الحل أمثل، كما أن قيمة دالة الهدف في هذا الحل لم تتغير عما هي عليه في الحالة السابقة، وبذلك أصبح لدينا حلين أساسيين بديلين هما:

الحل الأول	$\mathbf{X_1 = 5 \quad , \quad X_2 = 0 \quad , \quad Z = 10}$
الحل الثاني	$X_1 = 0 \quad , \quad X_2 = 10 \quad , \quad Z = 10$

4- انحلال الحل (حياد أحد القيود):

تظهر حالة الانحلال في حل مشكلة البرمجة الخطية عندما يكون واحد أو أكثر من متغيرات الحل الأساسي قيمته صفر، قد تظهر حالة الانحلال في أحد مراحل الحل، وإما تستمر لنهاية الحل أو تختفي قبل الوصول إلى الحل الأمثل، وعند استمرار حالة الانحلال إلى نهاية الحل لن تتحسن قيمة دالة الهدف.

يمكن الاستدلال على حالة الانحلال في طريقة السمبلكس عندما تتساوى النسبة الموجبة الدنيا التي نحدد من خلالها المتغير الذي سيغادر قاعدة الحل، أو إذا تساوت القيم في سطر دالة الهدف التي

على أساسها يتم اختيار المتغير الذي يدخل إلى قاعدة الحل[37]، ويمكن توضيح حالة الانحلال كما في المثال التالي:

مثال:

أوجد الحل الأمثل للبرنامج التالي باستخدام طريقة السمبلكس:

$$\text{MAX } z = 5X_1 + 10X_2$$

$$S/C\begin{cases} X_1 + 3X_2 \leq 6 \\ 2X_1 + 2X_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 \quad , \quad X_2 \geq 0$$

الحل:

جدول الحل الابتدائي هو:

م/ق	X_1	X_2	S_1	S_2	b_i	النسبة
Z	-5	-10	0	0	0	/
s_1	1	3	1	0	6	$\frac{6}{3} = 2$
s_2	2	2	0	1	4	$\frac{4}{2} = 2$

يمكن ملاحظة حالة الانحلال، حيث تساوت النسبة الموجبة الدنيا التي على أساسها يتم اختيار المتغير الذي سيغادر قاعدة الحل عند المتغيرين S_1 و S_2 ، في هذه الحالة نختار المتغير S_1 عشوائيا بسبب عدم وجود معيار لتحديد المتغير الخارج من القاعدة.

[37]– جهاد صياح بني هاني و آخرون، مرجع سبق ذكره، ص 93.

م/ق	X_1	X_2	S_1	S_2	b_i
Z	$-\frac{5}{3}$	0	$\frac{10}{3}$	0	20
X_2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	2
s_2	$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	1	0

نلاحظ أن قيمة المتغير الأساسي S_2 تساوي صفر، وهذا يعني أن ظهور حالة الانحلال في الحل يتمثل في عدم تحسن قيمة دالة الهدف Z(=20).

م/ق	X_1	X_2	S_1	S_2	b_i
Z	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{4}$	20
X_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	2
X_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	0

نلاحظ أن حالة الانحلال استمرت إلى غاية الوصول إلى الحل الأمثل، لذلك لم تتحسن قيمة دالة الهدف وبقيت عند القيمة 20.

تمارين محلولة:

التمرين الأول:

أوجد الحل الأمثل للبرنامجين التاليين باستخدام طريقة BIG M.

MIN $Z_2 = 5X_1 + 7X_2$	MAX $Z_1 = 3X_1 - X_2$
$S/C \begin{cases} X_1 + 2X_2 = 50 \\ X_1 \geq 20 \\ X_2 \leq 20 \end{cases}$	$S/C \begin{cases} 2X_1 + X_2 \geq 2 \\ X_1 + 3X_2 \leq 3 \\ X_2 \leq 4 \end{cases}$
$X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \geq 0$	$X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \geq 0$

الحل:

1-**الشكل القياسي:**

$$S/C \begin{cases} 2X_1 + X_2 - S_1 + R_1 = 2 \\ X_1 + 3X_2 + S_2 = 3 \\ X_2 + S_3 = 4 \end{cases}$$

$$X_1, X_2 \geq 0 \quad S_2, S_3 \geq 0 \quad R_1 \geq 0$$

دالة الهدف هي:

$$\text{MAX } Z_1 = 3X_1 - X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + MR_1$$

بعد تبسيط المعادلة نحصل على:

$$\text{MAX } Z_1 + (-2M - 3)X_1 + (-M + 1)X_2 + MS_1 = -2M$$

جدول الحل الابتدائي هو:

م/ق	X_1	X_2	S_1	R_1	S_2	S_3	b_i
Z	$-2M-3$	$-M+1$	M	0	0	0	$-2M$
R_1	2	1	-1	1	0	0	2
s_2	1	3	0	0	1	0	3
S_3	0	1	0	0	0	1	4

المتغير الذي سيدخل إلى القاعدة هو X_1، والذي سيخرج منها هو R_1، وجدول الحل الثاني هو:

م/ق	X_1	X_2	S_1	R_1	S_2	S_3	b_i
Z	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}+M$	0	0	3
X_1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1
s_2	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	2
S_3	0	1	0	0	0	1	4

المتغير الذي سيدخل إلى القاعدة هو S_1، والذي سيخرج منها هو S_2، وجدول الحل الثالث هو:

م/ق	X_1	X_2	S_1	R_1	S_2	S_3	b_i
Z	0	10	0	M	3	0	9
X_1	1	3	0	0	1	0	3
S_1	0	5	1	-1	2	0	4
S_3	0	1	0	0	0	1	4

نلاحظ من الجدول أن كل معاملات دالة الهدف موجبة أو صفرية وهذا يعني أن الحل أمثل:

$$\mathbf{X_1 = 3 \quad , \quad X_2 = 0 \quad , S_1 = 4, S_2 = 0 \quad , \quad S_3 = 4 \quad Z = 10}$$

2-الشكل القياسي:

$$S/C\begin{cases} X_1 + 2X_2 + R_1 = 50 \\ X_1 - S_2 + R_2 = 20 \\ X_2 + S_3 = 20 \end{cases}$$

$$X_1, X_2 \geq 0 \quad S_2, S_3 \geq 0 \qquad R_1, R_2 \geq 0$$

دالة الهدف هي:

$$\text{MIN } Z_2 = 5X_1 + 7X_2 + 0S_2 + 0S_3 + MR_1 + MR_2$$

بعد تبسيط المعادلة نحصل على:

$$\text{MIN } Z_2 + (2M-5)X_1 + (2M-7)X_2 - MS_2 = 70M$$

جدول الحل الابتدائي هو:

م/ق	X_1	X_2	S_2	R_1	R_2	S_3	b_i
Z	$2M-5$	$2M-7$	$-M$	0	0	0	$70M$
R_1	1	2	0	1	0	0	50
R_2	1	0	-1	0	1	0	20
S_3	0	1	0	0	0	1	20

المتغير الذي سيدخل إلى القاعدة هو X_1، والذي سيخرج منها هو R_2، وجدول الحل الثاني هو:

م/ق	X_1	X_2	S_2	R_1	R_2	S_3	b_i
Z	0	$2M-7$	$-M+5$	0	$+2M-5$	0	$-30M-100$
R_1	0	2	0	1	0	0	30
X_1	1	0	-1	0	1	0	20
S_3	0	1	0	0	0	1	20

المتغير الذي سيدخل إلى القاعدة هو X_2، والذي سيخرج منها هو R_1، وجدول الحل الثالث هو:

م/ق	X_1	X_2	S_2	R_1	R_2	S_3	b_i
Z	0	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}-M$	$\frac{3}{2}-M$	0	205
X_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	15
X_1	1	0	-1	0	1	0	20
S_2	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	45

نلاحظ من الجدول أن كل معاملات دالة الهدف سالبة أو صفرية وهذا يعني أن الحل أمثل:

$$\mathbf{X_1 = 20 \quad , \quad X_2 = 15 \quad , S_2 = 45 \quad , \quad S_3 = 0 \, , Z = 205 \; .}$$

التمرين الثاني:

أوجد الحل الأمثل للبرنامجين التاليين باستخدام طريقة المرحلتين.

$\text{MIN } Z_2 = 3X_1 + 8X_2$ $S/C \begin{cases} X_1 + 4X_2 \geq 7/2 \\ X_1 + 2X_2 \geq 5/2 \end{cases}$ $X_1 \geq 0 \;,\; X_2 \geq 0$	$\text{MAX } Z_1 = 2X_1 - 4X_2 + X_3$ $S/C \begin{cases} 2X_1 - 2X_2 + X_3 \leq 8 \\ X_1 + 2X_2 - 3X_3 \geq 6 \end{cases}$ $X_1 \geq 0 \;,\; X_2 \geq 0 \;,\; X_3 \geq 0$

الحل:

1-المرحلة الأولى:

-الشكل القياسي:

$$2X_1 - 2X_2 + X_3 + S_1 = 8$$
$$X_1 + 2X_2 - 3X_3 - S_2 + R_2 = 6$$

$$X_1, X_2 \geq 0 \quad S_1, S_2 \geq 0 \qquad R_2 \geq 0$$

-دالة الهدف المؤقتة هي:

$$\text{MAX} \rightarrow \Gamma = -R_2$$

$$\Gamma - X_1 - 2X_2 + 3X_3 + S_2 = -6$$

-جدول الحل الابتدائي يكون كما يلي:

م/ق	X_1	X_2	X_3	S_2	S_1	R_2	b_i
Γ	-1	-2	3	1	0	0	-6
S_1	2	-2	1	0	1	0	8
R_2	1	2	-3	-1	0	1	6

المتغير الذي سيدخل إلى القاعدة هو X_2، والذي سيخرج منها هو R_2، وجدول الحل الثاني هو:

م/ق	X_1	X_2	X_3	S_2	S_1	R_2	b_i
Γ	0	0	0	0	0	1	0
S_1	3	0	-2	-1	1	1	14
X_2	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3

نلاحظ أن كافة معاملات دالة الهدف صفرية أو موجبة، كما أن المتغير الاصطناعي R_3 خرج من قاعدة الحل، ودالة الهدف المؤقتة Γ تساوي صفر وهذا يعني الوصول إلى الحل الأمثل للمرحلة الأولى، مما يسمح بالانتقال إلى المرحلة الثانية.

-المرحلة الثانية:

-نستبدل معاملات دالة الهدف المؤقتة بمعاملات دالة الهدف الأصلية، مع استبعاد المتغيرات الاصطناعية .

م/ق	X_1	X_2	X_3	S_2	S_1	b_i
Z	-4	0	5	2	0	-12
S_1	3	0	-2	-1	1	14
X_2	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	3

الحل غير أمثل لبقاء معامل سالب في سطر دالة الهدف، إذن المتغير الذي سيدخل إلى القاعدة هو X_1، والذي سيخرج منها هو S_1، وجدول الحل الأمثل هو:

م/ق	X_1	X_2	X_3	S_2	S_1	b_i
Z	0	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{20}{3}$
X_1	1	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{14}{3}$
X_2	0	1	$-\frac{7}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$

يتضح من النتائج النهائية الواردة في الجدول بأن جميع معاملات دالة الهدف Z موجبة أو صفرية ومنه نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل للبرنامج حيث: $X_1 = \frac{14}{3}$ ، $X_2 = \frac{2}{3}$، $\mathbf{S_1 = 0}$ ، $\mathbf{S_2 = 0}$ ، $Z = \frac{20}{3}$.

2-المرحلة الأولى:

-الشكل القياسي:

$$X_1 + 4X_2 - S_1 + R_1 = 7/2$$
$$X_1 + 2X_2 - S_2 + R_2 = 5/2$$

$$X_1, X_2 \geq 0 \quad S_1, S_2 \geq 0 \quad R_1 \,,\ R_2 \geq 0$$

-دالة الهدف المؤقتة هي:

$$\text{MIN} \rightarrow \Gamma = R_1 + R_2$$
$$\Gamma + 2X_1 + 6X_2 - S_1 - S_2 = 6$$

-جدول الحل الابتدائي يكون كما يلي:

م/ق	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	b_i
Γ	2	6	-1	-1	0	0	6
R_1	1	4	-1	0	1	0	$7/2$
R_2	1	2	0	-1	0	1	$5/2$

المتغير الذي سيدخل إلى القاعدة هو X_2، والذي سيخرج منها هو R_1، وجدول الحل الثاني هو:

م/ق	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	b_i
Γ	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{4}$
X_2	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{7}{8}$
R_2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{4}$

المتغير الذي سيدخل إلى القاعدة هو X_1، والذي سيخرج منها هو R_1، وجدول الحل الثالث هو:

م/ق	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	b_i
Γ	0	0	0	0	-1	-1	0
X_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
X_1	1	0	1	-2	-1	2	$\frac{3}{2}$

نلاحظ أن كافة معاملات دالة الهدف صفرية أو سالبة، ودالة الهدف المؤقتة Γ تساوي صفر وهذا يعني الوصول إلى الحل الأمثل للمرحلة الأولى، مما يسمح بالانتقال إلى المرحلة الثانية.

-المرحلة الثانية:

-نستبدل معاملات دالة الهدف المؤقتة بمعاملات دالة الهدف الأصلية، مع استبعاد المتغيرات الاصطناعية .

م/ق	X_1	X_2	S_2	S_1	b_i
Z	0	0	-1	-2	$\frac{68}{8}$
X_2	**0**	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
X_1	1	0	1	-2	$\frac{3}{2}$

يتضح من النتائج النهائية الواردة في الجدول بأن جميع معاملات دالة الهدف Z سالبة أو صفرية ومنه نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل للبرنامج حيث: $X_1 = \frac{3}{2}$ ، $X_2 = \frac{1}{2}$، $\mathbf{S_1 = 0}$ ، $S_2 = \mathbf{0}$ ، $Z = \frac{68}{8}$.

تمارين للحل:

التمرين الأول:

أوجد الحل الأمثل للبرنامجين التاليين باستخدام طريقتي BIG M والمرحلتين.

$\text{MIN } Z_2 = 30X_1 + 20X_2 + 30X_3$ $s/c\begin{cases} 6X_1 + 3X_2 - X_3 \geq 20 \\ 2X_1 - 3X_2 + X_3 \geq 15 \\ 15X_1 + 12X_2 + 3X_3 \geq 6 \end{cases}$ $X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \geq 0, \ X_3 \geq 0$	$\text{MAX } Z_1 = 60X_1 + 60X_2 + 90X_3 + 90X_4$ $s/c\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 15 \\ 3X_1 + 5X_2 + 10X_3 + 15X_4 \leq 1 \\ -7X_1 - 5X_2 - 3X_3 - 2X_4 \geq -1 \end{cases}$ $X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \geq 0, \ X_3 \geq 0, \ X_4 \geq 0$

التمرين الثاني:

أوجد الحل الأمثل للبرنامجين التاليين باستخدام طريقة السمبلكس.

$\text{MAX } Z_2 = 10X_1 + 20X_2$ $S/C \begin{cases} 8X_1 + 10X_2 \leq 112 \\ 4X_1 + 3X_2 \geq 24 \end{cases}$ $X_1 \forall \ , \ X_2 \geq 0$	$\text{MAX } Z_1 = 3X_1 + 2X_2 - 3X_3$ $S/C \begin{cases} 2X_1 + X_2 - X_3 \leq 4 \\ X_1 - X_2 + X_3 \geq 5 \\ 2X_1 + 3X_2 + 3X_3 = 6 \end{cases}$ $\forall X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \leq 0, \ X_3$

التمرين الثالث:

باستخدام طريقة السمبلكس بين أن النماذج التالية عبارة عن حالات خاصة.

$\text{MAX } Z_2 = 5X_1 - 2X_2 + 3X_3$ $S/C \begin{cases} 2X_1 + 2X_2 - X_3 \geq 2 \\ 3X_1 - 4X_2 \leq 3 \\ X_2 + 3X_3 \leq 5 \end{cases}$ $X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \geq 0, \ X_3 \geq 0$	$\text{MIN } Z_1 = 2X_1 + 3X_2$ $S/C \begin{cases} 5/2X_1 + 2X_2 \leq 5 \\ 5X_1 + 4X_2 \geq 20 \end{cases}$ $X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \geq 0$
$\text{MAX } Z_4 = X_1 + 2X_2$ $S/C \begin{cases} -2X_1 + 3X_2 \leq 9 \\ X_1 - 2X_2 \leq 2 \end{cases}$ $X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \geq 0$	$\text{MAX } Z_3 = 2.5X_1 + 2X_2$ $S/C \begin{cases} 3X_1 + 5X_2 \leq 15 \\ 5X_1 + 2X_2 \leq 10 \end{cases}$ $X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \geq 0.$

المحور الثالث:

الثنائية (النموذج المقابل)

المحور الثالث:الثنائية.

تمهيد:

يعتبر البرنامج الثنائي(المقابل) نقلة نوعية في تطور بحوث العمليات لما له من أهمية سواء على الصعيد النظري أو التطبيقيتقوم فكرته على أساس أن لكل مسألة (نموذج) برمجة خطية مسألة ثنائية ترتبط ، معهابحيث أن حل إحداهما يمكن من معرفة حل المسألة الأخرى، بمعنى أن حل إحداهما يمكننا من ، الحصول على حلول لمسألتي البرمجة الخطية، هذا ويساعد حل البرنامج الثنائي في الوصول إلى الحل الأمثل بشكل أسرع عندما يكون عدد قيود البرنامج الأولي أكبر من عدد قيود البرنامج الثنائي، فحجم العمليات الحسابية في البرمجة الخطية يتوقف على عدد القيود أكثر من اعتماده على عد المتغيرات .

أولا: فوائد تحويل النموذج الأولي إلى النموذج الثنائي: يمكن ذكرها فيما يلي[38]:

أ-الحصول على نموذج يحتوي على عدد أقل من القيود، وبذلك سوف يختصر العمل الحسابي لجداول السمبلكس والوصول إلى الحل الأمثل، والحصول على نفس الحل الأمثل سواءا كان الحل للنموذج الأولي أو الحل للنموذج الثنائي.

ب-للتخلص من الإشارة السالبة في الجانب الأيمن (إن وجدت) أي عندما تكون المصادر ذات كميات سالبة وهو أهم ما يمكن الحصول عليه في حالة التحويل إلى النموذج الثنائي.

ج-لغرض التعرف على أبعاد المشكلة الثنائية، فإذا كان النموذج الأولي بصيغة التعظيم أي المشكلة بالصيغة الربحية، فبإمكاننا التعرف على النموذج الثنائي ويكون بصيغة التصغير وتمثيله للجانب الكلفوي لنفس المشكلة المعبر عنها بالصيغة الأولية.

د-يساعد حل النموذج المقابل على إجراء تحليل ما بعد الأمثلية والتوصل إلى حلول بطريقة مختصرة في حالة إجراء تغييرات في معاملات المتغيرات الأساسية في تلك المشكلة أو إضافة قيود جديدة للمشكلة.

هـ-تساعد الإدارة في معرفة قيمة البدائل الأخرى للقرار.

---

[38]- حامد سعد نور الشمرتي، **بحوث العمليات مفهوما وتطبيقا**، مكتبة الذاكرة ، العراق، 2010، ص 76.

ثانيا:صياغة النموذج المقابل: تتلخص عملية تحويل النموذج الأولي إلى النموذج المقابل وبالعكس في عدد من الخطوات التي يمكن إدراجها بالشكل الآتي[39]:

أ-إذا كان هدف المشكلة في النموذج الأولي تعظيم الأرباح، فيصبح هدف المشكلة في النموذج المقابل تقليل التكاليف والعكس بالعكس.

ب-معاملات دالة الهدف في النموذج الأولي ستكون قيمة الطرف الأيمن في النموذج المقابل والعكس صحيح.

ج- تحويل معاملات المتغيرات في قيود المشكلة بحيث تصبح الصفوف أعمدة والأعمدة صفوفا، بمعنى أن معاملات العمود j في النموذج الأولي تتغير إلى معاملات الصف في النموذج المقابل.

د- تحويل اتجاه المتراجحات من أصغر أو يساوي إلى أكبر أو يساوي والعكس صحيح.

هـ- استبدال جميع المتغيرات المشار إليها بالمتغيرات x في النموذج الأولي إلى متغيرات y في النموذج المقابل.

ملاحظة: لا بد من مراعاة بعض الجوانب عند تحويل النموذج الأولي إلى مقابل أو العكس، فإذا كانت المشكلة تهدف إلى تعظيم الربح فيجب أن تكون جميع المتراجحات باتجاه واحد وهو أصغر أو يساوي، بينما تكون المتراجحات في شكل أكبر أو يساوي في حالة كون المشكلة تهدف إلى تقليل التكاليف، أما إذا وجدت بعض المتراجحات مخالفة لما ذكر أعلاه ، فلا بد من تحويلها إلى الاتجاه المطلوب وذلك بضربها في(1-).

يمكن تصنيف البرنامج المقابل إلى مجموعتين حسب الشكل العام للبرنامج الأولي:

أ-ثنائية الصيغ القانونية:

إذا كان البرنامج الأولي في صيغته القانونية التالية:

$$\text{MAX}\ (Z) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad \leq \quad b_i \quad ; \quad i = 1,2,\dots,m$$

$$, b_i \geq 0\ x_j \geq 0$$

[39]-أحمد عبد إسماعيل الصفار، مجدة عبد اللطيف التميمي، **بحوث العمليات تطبيقات على الحاسوب**، دار المناهج، الأردن،2007، ص ص 264-265.

فإن برنامجه الثنائي يكون كالتالي:

$$\text{MIN }(W) = \sum_{i=1}^{m} b_i \ y_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \quad \geq \quad c_j \quad ; \ j = 1,2, \dots, n$$

$$, c_j \geq 0 \ y_i \geq 0$$

مثال1:

ليكن لدينا البرنامج الأولي التالي:

$$\text{MAX } Z = 30X_1 + 60X_2 + 90X_3$$

$$S/C \begin{cases} 10X_1 + 6X_2 + 3X_3 \leq 100 \\ X_1 + 3X_2 + 6X_3 \leq 200 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \geq 0, \ X_3 \geq 0.$$

يكون الشكل الثنائي كما يلي:

$$\text{MIN } W = 100Y_1 + 200Y_2$$

$$S/C \begin{cases} 10Y_1 + Y_2 \geq 30 \\ 6Y_1 + 3Y_2 \ \geq 60 \\ 3Y_1 + 6Y_2 \geq 90 \end{cases}$$

$$Y_1 \geq 0 \ , \ Y_2 \geq 0$$

نلاحظ أن عدد المتغيرات في البرنامج الثنائي يساوي عدد القيود في البرنامج الأولي، وعدد القيود في البرنامج الثنائي يساوي عدد المتغيرات في البرنامج الأولي.

مثال2:

ليكن لدينا البرنامج الأولي التالي:

$$\text{MIN } Z = 3X_1 + 10X_2$$

$$S/C \begin{cases} 15X_1 + 2X_2 \geq 10 \\ 7X_1 + 5X_2 \ \geq 20 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \geq 0$$

يكون الشكل الثنائي كما يلي:

$$\text{MAX } W = 10Y_1 + 20Y_2$$

$$S/C\begin{cases} 15Y_1 + 7Y_2 \leq 3 \\ 2Y_1 + 5Y_2 \leq 10 \end{cases}$$

$$Y_1 \geq 0 \ , \ Y_2 \geq 0$$

ب–ثنائية الصيغ المختلطة:

1– إذا كان البرنامج الأولي في الصيغة التالية:

$$OPT\ (Z) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad ; \ i = 1,2,\dots,m$$

$$, b_i \geq 0 \ x_j \geq 0$$

في هذه الحالة فإنه يتم إيجاد البرنامج الثنائي وفق القواعد التالية:[40]

- يلزم تحويل القيد الفني في شكل معادلة إلى متراجحتين متعاكستي الاتجاه، ثم ننظر بعد ذلك إلى دالة الهدف فإذا كانت في شكل MIN فإنه يجب تحويل كل القيود الفنية الناتجة إلى أكبر أو يساوي، أما إذا كانت دالة الهدف في شكل MAX فإنه يجب تحويل كل القيود الفنية الناتجة إلى أصغر أو يساوي.
- بعد هذا التحويل نقوم بتكوين النموذج الثنائي للنموذج الأولي السابق بإتباع القواعد العامة المشار إليها سابقا.

[40]– مكيد علي، مرجع سبق ذكره، ص ص118–119.

مثال:

ليكن لدينا البرنامج الأولي التالي:

$$\text{MAX } Z = 4X_1 + 5X_2 + 9X_3$$

$$S/C\begin{cases} X_1 + X_2 + 2X_3 = 16 \\ 7X_1 + 5X_2 + 3X_3 = 25 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \geq 0, \ X_3 \geq 0.$$

بحسب القواعد السابقة فإن البرنامج يصبح:

$$\text{MAX } Z = 4X_1 + 5X_2 + 9X_3$$

$$s/c\begin{cases} X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 16 \\ X_1 + X_2 + 2X_3 \geq 16 \\ 7X_1 + 5X_2 + 3X_3 \leq 25 \\ 7X_1 + 5X_2 + 3X_3 \geq 25 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \geq 0, \ X_3 \geq 0.$$

نقوم بتحويل جميع القيود إلى الشكل أقل أو يساوي لأن دالة الهدف من نوع MAX فنحصل على النموذج التالي:

$$\text{MAX } Z = 4X_1 + 5X_2 + 9X_3$$

$$s/c\begin{cases} X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 16 \\ -X_1 - X_2 - 2X_3 \leq -16 \\ 7X_1 + 5X_2 + 3X_3 \leq 25 \\ -7X_1 - 5X_2 - 3X_3 \leq -25 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \geq 0, \ X_3 \geq 0.$$

عدد القيود 4 لذلك فإن عدد المتغيرات في البرنامج الثنائي سيكون 4 وهي: Y_1'، Y_1''، Y_2'، Y_2'' والنموذج هو:

$$\text{MIN } W = 16Y_1' - 16Y_1'' + 25Y_2' - 25Y_2''$$

$$S/C \begin{cases} Y_1' - Y_1'' + 7Y_2' - 7Y_2'' \geq 4 \\ Y_1' - Y_1'' + 5Y_2' - 5Y_2'' \geq 5 \\ 2Y_1' - 2Y_1'' + 3Y_2' - 3Y_2'' \geq 9 \end{cases}$$

$$Y_1' \geq 0 \ , \ Y_1'' \geq 0, \ Y_2' \geq 0, \ Y_2'' \geq 0$$

يمكن كتابة النموذج الثنائي بالشكل التالي:

$$\text{MIN } W = 16(Y_1' - Y_1'') + 25(Y_2' - Y_2'')$$

$$S/C \begin{cases} (Y_1' - Y_1'') + 7(Y_2' - Y_2'') \geq 4 \\ (Y_1' - Y_1'') + 5(Y_2' - Y_2'') \geq 5 \\ 2(Y_1' - Y_1'') + 3(Y_2' - Y_2'') \geq 9 \end{cases}$$

$$Y_1' \geq 0 \ , \ Y_1'' \geq 0, \ Y_2' \geq 0, \ Y_2'' \geq 0$$

وبجعل :

$Y_1 = Y_1' - Y_1''$ و $Y_2 = Y_2' - Y_2''$ علما بأن Y_1 و Y_2 غير مقيدة الإشارة وذلك لاعتمادها على متغيرين،

يصبح النموذج كالآتي:

$$\text{MIN } W = 16Y_1 + 25Y_2$$

$$S/C \begin{cases} Y_1 + 7Y_2 \geq 4 \\ Y_1 + 5Y_2 \geq 5 \\ 2Y_1 + 3Y_2 \geq 9 \end{cases}$$

$$Y_1 \ \forall \ , \ Y_2 \ \forall$$

2- إذا كان البرنامج الأولي في الصيغة التالية:

$$OPT\ (Z) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ (\geq , \leq) \ b_i \quad ; \ i = 1,2, \dots , m$$

$$, b_i \geq 0 \ x_j \ \forall$$

في هذه الحالة تكون المتغيرات حرة، وهذا الشكل من النماذج الخطية هو عكس الحالة السابقة والنموذج الثنائي المناسب له يكون كما يلي:

$$\text{OPT}\ (W) = \sum_{i=1}^{m} b_i\ y_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ = \ c_j \quad ; \ j = 1,2,\dots,n$$

$$, c_j \geq 0\ y_i \geq 0$$

أي إذا كان أي متغير X_j في النموذج الأولي حرا فإن القيد المقابل له في البرنامج الثنائي يكون على شكل معادلة.

مثال:

ليكن لدينا البرنامج الأولي التالي:

$$\text{MAX}\ Z = X_1 + X_2$$

$$S/C \begin{cases} 3X_1 + X_2 \leq 3 \\ X_1 + 2X_2 \leq 8 \\ -5X_1 + X_2 \leq 5 \end{cases}$$

$$X_1\ \forall,\ \ X_2\ \forall.$$

يكون الشكل الثنائي كما يلي:

$$\text{MIN}\ W = 3Y_1 + 8Y_2 + 5Y_3$$

$$S/C \begin{cases} 3Y_1 + Y_2 - 5Y_3 = 1 \\ \\ Y_1 + 2Y_2 + Y_3 = 1 \end{cases}$$

$$Y_1 \geq 0\ ,\ \ Y_2 \geq 0,\ \ Y_3 \geq 0$$

ثالثا:العلاقة بين النموذج الأولي والثنائي

كما أشرنا سابقا فإن لكل مسألة أولية مسألة مقابلة، لذلك يجب أن تكون جميع العلاقات بينهما متناظرة، لأن المقابل لهذه المسألة المقابلة هي المسألة الأولية، ونتيجة لذلك فإن هناك تناظر مباشر بين حلولهما، فإذا كان هناك حلا أساسيا ممكنا للنموذج الأولي فإن هناك حلا أساسيا ممكنا للنموذج المقابل، وإذا كان لأي من النموذجين حلا أساسيا فإن لهما حلا أمثلا.

يمكن التعبير عن العلاقة بين النموذج الأولي والثنائي في جدول الحل الأمثل كما يلي[41]:

- ❖ القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة أو المتغيرات الاصطناعية التي تظهر في سطر دالة الهدف للبرنامج الأولي تساوي قيم المتغيرات الرئيسية للنموذج الثنائي على وجه الترتيب وبالقيمة المطلقة؛
- ❖ القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة أو المتغيرات الاصطناعية التي تظهر في سطر دالة الهدف للبرنامج الثنائي تساوي قيم المتغيرات الرئيسية للنموذج الأولي على وجه الترتيب وبالقيمة المطلقة؛
- ❖ قيم المتغيرات الحقيقية في البرنامج الأولي والتي تظهر في عمود الثوابت، تساوي القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة للبرنامج الثنائي والتي تظهر في سطر دالة الهدف في جدول الحل الأمثل، وقيم المتغيرات الحقيقية في البرنامج الثنائي والتي تظهر في عمود الثوابت، تساوي القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة للبرنامج الأولي والتي تظهر في سطر دالة الهدف في جدول الحل الأمثل (بالقيمة المطلقة).
- ❖ قيمة الدالة الاقتصادية في الحل الأمثل للبرنامجين تكون متساوية، وفي كلا الحالتين تأخذ قيمتها المطلقة.

مثال: ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\text{MIN } Z = 6X_1 + 5X_2$$

$$S/C\begin{cases} 2X_1 + X_2 \geq 5 \\ 3X_1 + 4X_2 \geq 9 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 \;,\; X_2 \geq 0$$

المطلوب:

1- أوجد جدول الحل الأمثل.

2- أوجد البرنامج الثنائي ثم أوجد جدول الحل الأمثل الخاص به.

3- قارن نتائج الحل في البرنامجين، ماذا تستنتج؟

[41] – راتول محمد، مرجع سبق ذكره، ص ص 83-84.

الحل:

1-بعد تحويل البرنامج إلى شكله القياسي وإضافة المتغيرات الاصطناعية نحصل على جدول الحل الابتدائي التالي:

م/ق	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	b_i
Z	$-6+5M$	$-5+5M$	$-M$	$-M$	0	0	$14\,M$
R_1	2	1	-1	0	1	0	5
R_2	3	4	0	-1	0	1	9

المتغير الذي سيدخل إلى القاعدة هو X_2، والذي سيخرج منها هو R_2، وجدول الحل الثاني هو:

م/ق	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	b_i
Z	$-\frac{9}{4}+\frac{5M}{4}$	0	$-M$	$-\frac{5}{4}+\frac{M}{4}$	0	$\frac{5}{4}-\frac{5M}{4}$	$\frac{45}{4}+\frac{11M}{4}$
R_1	$\frac{5}{4}$	0	-1	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{11}{4}$
X_2	$\frac{3}{4}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$

المتغير الذي سيدخل إلى القاعدة هو X_1، والذي سيخرج منها هو R_1، وجدول الحل الثالث هو:

م/ق	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	b_i
Z	0	0	$-\frac{9}{4}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{9}{5}-M$	$\frac{4}{5}-M$	16.2
X_1	1	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{11}{5}$
X_2	0	1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

انتهت كل المعاملات الموجبة في سطر دالة الهدف إذن الحل أمثل حيث: $X_1 = \frac{11}{5}$ ، $X_2 = \frac{3}{5}$ ، $Z =$ 16.2.

نلاحظ أن معاملات المتغيرات الاصطناعية R_1 و R_2 تساوي على التوالي $\frac{9}{5}$ و $\frac{4}{5}$ (مع الاستغناء على $M-$)
وهما يمثلان قيمة المتغيرين Y_1 و Y_2 للبرنامج الثنائي، بمعنى قيم متغيرات الحل الأمثل ويمكن التأكد من ذلك من جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي.

2–البرنامج الثنائي هو:

$$\text{MAX } W = 5Y_1 + 9Y_2$$

$$S/C \begin{cases} 2Y_1 + 3Y_2 \leq 6 \\ Y_1 + 4Y_2 \leq 5 \end{cases}$$

$$Y_1 \geq 0 \ , \ Y_2 \geq 0.$$

بعد تحويل البرنامج إلى شكله القياسي نحصل على جدول الحل الابتدائي التالي:

م/ق	Y_1	Y_2	S_1	S_2	b_i
W	-5	-9	0	0	0
S_1	2	3	1	0	6
S_2	1	4	0	1	3

المتغير الذي سيدخل إلى القاعدة هو Y_2، والذي سيخرج منها هو S_2، وجدول الحل الثاني هو:

م/ق	Y_1	Y_2	S_1	S_2	b_i
W	$-\frac{11}{4}$	0	0	$\frac{9}{4}$	$\frac{45}{4}$
S_1	$\frac{5}{4}$	0	1	$-\frac{3}{4}$	$\frac{9}{4}$
Y_2	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$

المتغير الذي سيدخل إلى القاعدة هو Y_1، والذي سيخرج منها هو S_1، وجدول الحل الثالث هو:

م/ق	Y_1	Y_2	S_1	S_2	b_i
W	0	0	$\frac{11}{5}$	$\frac{3}{5}$	16.2
Y_1	1	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{9}{5}$
Y_2	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{5}$

انتهت كل المعاملات السالبة في سطر دالة الهدف إذن الحل أمثل حيث: $Y_1 = \frac{9}{5}$، $Y_2 = \frac{4}{5}$، $W = 16.2$.

3–المقارنة والاستنتاج:

من جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي وجدنا أن $X_1 = \frac{11}{5}$ وهي تقابل قيمة S_1 في سطر دالة الهدف في جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي، كما أن $X_2 = \frac{11}{5}$ وهي تقابل قيمة S_2 في سطر دالة الهدف في جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي.

وإذا ما نظرنا إلى سطر دالة الهدف في جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي نجد أن R_1 تقابلها القيمة $\frac{9}{5}$ وهي قيمة Y_1 في البرنامج الثنائي، أما R_2 فتقابلها القيمة $\frac{4}{5}$ وهي قيمة Y_2 في البرنامج الثنائي، يتم هذا التقابل على وجه الترتيب مع إهمال الإشارة السالبة، نلاحظ كذلك أن معامل S_1 و S_2 في سطر دالة الهدف يعطي مباشرة قيمة Y_1 و Y_2 في البرنامج الثنائي مع إهمال الإشارة السالبة، وهي نفس النتيجة التي تحصلنا عليها في جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي.

ومنه نستنتج أن جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي يتضمن الحل الأمثل للبرنامج الثنائي، وجدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي يتضمن الحل الأمثل للبرنامج الأولي.

رابعا: التفسير الاقتصادي للبرنامج الثنائي:

سنورد في هذه الفقرة ما ينطوي عليه النموذج الثنائي، أي معنى ما تذهب إليه تغيير القيود وجعل المصادر في الجانب الأيمن معاملات لمتغيرات دالة الهدف، وتفسير تخصيص لكل قيد متغير بديل في النموذج الثنائي عن طريق سرد المثال الآتي:[42]

مثال:

تنتج إحدى الشركات نوعين من المنتجات هي X_1 وX_2 باستخدام ثلاثة عناصر إنتاجية هي المواد الأولية والطاقة والعمل، ويوضح الجدول الآتي المتاح من هذه الموارد، ما تحتاجه الوحدة الواحدة من كل من X_1 وX_2 من هذه الموارد وربح كل منها.

المنتج / عناصر الإنتاج	المنتجات X_1	المنتجات X_2	الموارد المتاحة
مواد أولية	2	4	16
طاقة	6	2	20
عمل	8	6	24
ربح الوحدة الواحدة	4	6	

المطلوب:

1-إيجاد البرنامج الخطي لهذه المسألة.

2-إيجاد البرنامج الثنائي وتفسيره اقتصاديا.

الحل:

1- البرنامج الأولي يعطى بالشكل التالي:

$$MAX\ Z = 4X_1 + 6X_2$$

$$S/C \begin{cases} 2X_1 + 4X_2 \leq 16 & \text{قيد المواد الأولية} \\ 6X_1 + 2X_2 \leq 20 & \text{قيد الطاقة} \\ 8X_1 + 6X_2 \leq 24 & \text{قيد العمل} \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0\ ,\ X_2 \geq 0$$

42 - حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سبق ذكره، ص ص 87-89 .

حل النموذج الأولي يعطينا قيم X_1 وX_2 وقيم Z المثلى التي تجعل قيمة الربح أكبر ما يمكن بالإضافة إلى الوحدات غير المستغلة من المواد الأولية، لكنه لا يحدد كلفة الوحدة الواحدة من X_1 وX_2 والكلفة الكلية للإنتاج لذلك يتم استخراج البرنامج الثنائي.

2- البرنامج الثنائي يكون بالشكل التالي:

$$\text{MIN } W = 16Y_1 + 20Y_2 + 24Y_3$$

$$S/C \begin{cases} 2Y_1 + 6Y_2 + 8Y_3 \geq 4 \\ 4Y_1 + 2Y_2 + 6Y_3 \geq 6 \end{cases}$$

$$Y_1 \geq 0 \ , \ \ Y_2 \geq 0, \ \ Y_3 \geq 0$$

حيث:

Y_1 : سعر الوحدة الواحدة من المواد الأولية.

Y_2: سعر الوحدة الواحدة من الطاقة.

Y_3: سعر الوحدة الواحدة من العمل.

يمكن تفسير معاملات دالة الهدف كما يلي:

$16Y_1$: كلفة المواد الأولية (أي حاصل ضرب سعر الوحدة الواحدة من المواد الأولية في كمية المواد الأولية المتوفرة).

$20Y_2$: كلفة الطاقة (أي حاصل ضرب سعر الوحدة الواحدة من الطاقة في كمية الطاقة المتوفرة).

$24Y_1$: كلفة العمل (أي حاصل ضرب سعر الوحدة الواحدة من العمل في كمية العمالة المتوفرة).

والمجموع لهذه الحدود الثلاثة يمثل الكلفة الكلية، ولهذا نسعى إلى تحقيق اقل كلفة للعملية الإنتاجية دالة الهدف للنموذج المقابل من نوع تدنئة، مع تحقيق الأرباح التي حددت وفق النموذج الأولي.

أما التفسير الاقتصادي لقيود النموذج الثنائي:

القيد الأول:

$2Y_1$: تمثل كلفة المواد الأولية اللازمة لتصنيع الوحدة الواحدة من المنتوج X_1 .

$6Y_1$: تمثل كلفة الطاقة اللازمة لتصنيع الوحدة الواحدة من المنتوجX_1 .

$8Y_1$: تمثل كلفة العمل اللازمة لتصنيع الوحدة الواحدة من المنتوجX_1 .

والمجموع لهذه الحدود الثلاثة يمثل الكلفة الكلية اللازمة لتصنيع وحدة واحدة من المنتوج X_1 ، إذن القيد الأول هو كلفة إنتاج وحدة واحدة من X_1 ، حيث أن الكلفة الكلية لتصنيع وحدة واحدة من X_1 يجب أن تساوي أو بالحد الأدنى لربح الوحدة الواحدة من المنتوج X_1 ومقداره 4.

القيد الثاني:

$4Y_1$: تمثل كلفة المواد الأولية اللازمة لتصنيع الوحدة الواحدة من المنتوج X_2 .

$2Y_1$: تمثل كلفة الطاقة اللازمة لتصنيع الوحدة الواحدة من المنتوجX_2 .

$6Y_1$: تمثل كلفة العمل اللازمة لتصنيع الوحدة الواحدة من المنتوجX_2 .

المجموع لهذه الحدود الثلاثة يمثل الكلفة الكلية اللازمة لتصنيع وحدة واحدة من المنتوج X_2 ، إذن القيد الثاني هو كلفة إنتاج وحدة واحدة من X_2 ، حيث أن الكلفة الكلية لتصنيع وحدة واحدة من X_2 يجب أن تساوي أو بالحد الأدنى لربح الوحدة الواحدة من المنتوج X_2 ومقداره 6.

خامسا: طريقة السمبلكس المقابلة:

لضمان الحصول على حل أمثل لنموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس يجب أن يكون الجانب الأيمن للقيود (قيمة الموارد) موجب، فإذا كان الجانب الأيمن سالبا فعندئذ يتعذر الحصول على الحل الأمثل، كما توجد حالة أخرى وهي أثناء الحل بطريقة السمبلكس الاعتيادية وعند الانتقال من جدول سمبلكس إلى آخر يظهر في الجانب الأيمن الإشارة السالبة لبعض قيم المتغيرات أو جميعها[43]، فالعلاج في هاتين الحالتين هو إتباع طريقة السمبلكس المقابلة للتخلص من شرط عدم سالبية الجانب الأيمن وعلى هذا الأساس فلا حاجة لإدخال المتغيرات الاصطناعية إلى النموذج، وتتلخص طريقة السمبلكس المقابلة فيما يلي:[44]

1- المتغير الخارج هو المتغير الأساسي الذي يقابل القيمة الأكثر سالبية في عمود b_i.

2- المتغير الداخل ينتج من حاصل قسمة صف الأرباح النسبية على صف المحور وتتم القسمة على القيم السالبة فقط، ويتم اختيار أكبر قيمة لتمثل المتغير الداخل في حالة كون دالة الهدف من نوع MIN وأقل قيمة في حالة كون دالة الهدف من نوع MAX.

لتوضيح خطوات هذه الطريقة نستعين بالمثال التالي:

[43] - حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سبق ذكره، ص95.

[44] – حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، مرجع سبق ذكره، ص96.

مثال:

افرض أن الصيغة الأولية لمشكلة البرمجة الخطية هي كالتالي:

$$\text{MAX } Z = 3X_1 + 2X_2$$

$$S/C \begin{cases} X_1 - 2X_2 \leq 1 \\ 2X_1 - 2X_2 \leq 4 \\ -X_1 + 4X_2 \leq 0 \\ X_1 + X_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \geq 0$$

نحول الصيغة الأولية إلى الصيغة المقابلة كما يلي:

$$\text{MIN } W = Y_1 + 4Y_2 + 3Y_4$$

$$S/C \begin{cases} Y_1 + 2Y_2 - Y_3 + Y_4 \geq 3 \\ \\ -2Y_1 - 2Y_2 + 4Y_3 + Y_4 \geq 2 \end{cases}$$

$$Y_1 \geq 0 \ , \ Y_2 \geq 0, \ Y_3 \geq 0, \ Y_4 \geq 0$$

لتطبيق طريقة السمبلكس المقابلة يجب تحويل إشارة القيود إلى أصغر أو يساوي، وكذلك جعل الطرف الأيمن سالبا بضرب القيدين في (-1):

$$S/C \begin{cases} -Y_1 - 2Y_2 + Y_3 - Y_4 \leq -3 \\ \\ 2Y_1 + 2Y_2 - 4Y_3 - Y_4 \leq -2 \end{cases}$$

$$Y_1 \geq 0 \ , \ Y_2 \geq 0, \ Y_3 \geq 0, \ Y_4 \geq 0$$

وبإضافة متغيرات الفجوة نحصل على الشكل القياسي التالي:

$$\text{MIN } W - Y_1 - 4Y_2 - 3Y_4 + 0S_1 + 0S_2 = 0$$

$$S/C \begin{cases} -Y_1 - 2Y_2 + Y_3 - Y_4 + S_1 = -3 \\ \\ 2Y_1 + 2Y_2 - 4Y_3 - Y_4 + S_2 = -2 \end{cases}$$

$$Y_1 \geq 0 \ , \ Y_2 \geq 0, \ Y_3 \geq 0, \ Y_4 \geq 0 , S_1 \geq 0 \ , S_2 \geq 0$$

بوضع الشكل القياسي في جدول الحل الابتدائي نحصل على ما يلي:

م/ق	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	S_1	S_2	b_i
W	-1	-4	0	-3	0	0	0
S_1	-1	-2	1	-1	1	0	-3
S_2	2	2	-4	-1	0	1	-2

من الجدول نجد أن الحل الابتدائي غير مقبول حيث أن قيم متغيرات القاعدة سالبة، $S_1 = -3$، $S_2 = -2$ لذلك يتم إيجاد الحل باستخدام طريقة السمبلكس المقابلة، وكما نعلم فإن الطرف الأيمن عبارة عن معاملات دالة الهدف في النموذج الأولي، لذلك نختار المتغير الخارج على أنه المتغير الذي له أكبر قيمة بالسالب، وهو S_1 لأنه يقابل القيمة -3 في عمود الثوابت.

نقسم معاملات المتغيرات في دالة الهدف على القيم التي تقابلها في سطر المتغير الخارج ويتم اختيار المتغير الذي يعطي أقل نسبة كمتغير داخل وتهمل القسمة على الصفر وعلى القيم الموجبة.

المتغيرات غير الأساسية	S_1	W	النسبة
Y_1	-1	-1	1
Y_2	-2	-4	2
Y_3	1	0	---
Y_4	-1	-3	3

يتضح من الجدول أن المتغير الذي له أقل نسبة هو Y_1 إذن هو يمثل المتغير الداخل، وللحصول على معاملات السطر Y_1 الجديدة نقسم سطر S_1 على عنصر المحور الناتج من تقاطع سطر المتغير الخارج مع عمود المتغير الداخل وهو -1 فينتج:

Y_1	1	2	-1	1	-1	0	3

أما معاملات السطر S_2 الجديدة فنحصل عليها بضرب معاملات السطر Y_1 الجديدة في معامل المتغير الداخل Y_1 في السطر S_2 وهو 2 ونطرحها من قيم S_2 القديمة فنحصل على:

$$S_2: \quad \begin{array}{ccccccc} 2 & 1 & -4 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & 2 & -2 & 0 & 6 \\ \hline 0 & -3 & -2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}$$

ويتم الحصول على معاملات سطر W الجديدة بضرب معاملات السطر Y_1 الجديدة في معامل المتغير الداخل Y_1 في السطر W وهو -1 ونطرحها من قيم W القديمة فنحصل على:

$$W: \quad \begin{array}{ccccccc} -1 & -4 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ \hline 0 & -2 & -1 & -2 & -1 & 0 & 3 \end{array}$$

وبذلك نحصل على الجدول التالي:

م/ق	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	S_1	S_2	b_i
W	0	-2	-1	-2	-1	0	3
Y_1	1	2	-1	1	-1	0	3
S_2	0	-3	-2	-3	2	1	-8

نلاحظ من خلال الجدول أن الحل ليس أمثلا، إذن المتغير الخارج هو S_2 لأنه المتغير ذو القيمة الأكثر سالبية وتساوي -8، أما المتغير الداخل فهو Y_3، وبإتباع الخطوات السابقة نحصل على الجدول التالي:

م/ق	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	S_1	S_2	b_i
W	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	7
Y_1	1	$\frac{7}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	7
Y_3	0	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	1-	$-\frac{1}{2}$	4

نلاحظ أن جميع قيم عمود الثوابت موجبة، كما أن معاملات دالة الهدف سالبة أو صفرية إذن الحل أمثل:

$Y_1 = 7$ ، $Y_2 = 0$ ، $Y_3 = 4$ ، $Y_4 = 0$ ، $W = 16.2$.

تمارين محلولة:

التمرين الأول: أوجد البرنامج الثنائي للبرامج التالية:

$\text{Max } z_1 = 10x_1 + 30x_2$ $S/C \begin{cases} 3X_1 + 2X_2 \leq 6 \\ 6X_1 + X_2 \leq 14 \\ 3x_1 + X_2 \geq 2 \end{cases}$ $x_1 \geq 0 \;,\; x_2 \geq 0$	$\text{Min } z_2 = 2x_1 + x_2$ $S/C \begin{cases} 2X_1 - X_2 \geq -2 \\ X_1 - X_2 \leq 2 \\ -x_1 + X_2 \leq -5 \end{cases}$ $x_1 \geq 0 \;,\; x_2 \geq 0$
$\text{Min } z_3 = -x_1 + 2X_2$ $S/C \begin{cases} -5X_1 - 3X_2 = 30 \\ X_1 - X_2 \leq 2 \end{cases}$ $x_1 \geq 0 \;,\; x_2 \forall$	$\text{Max } z_4 = 9x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4$ $S/C \begin{cases} 3X_1 + 5X_2 + 10x_3 + x_4 \geq 100 \\ -4X_1 - X_2 - x_4 \geq -50 \\ x_1 + X_2 + 7x_3 + 7x_4 = 20 \end{cases}$ $x_1 \geq 0 \;,\; x_2 \geq 0 \quad x_3 \forall \;,\; x_4 \geq 0$

الحل:

البرنامج الأول:

$$\text{M ax } z_1 = 10x_1 + 30x_2$$

$$S/C \begin{cases} 3X_1 + 2X_2 \leq 6 \\ 6X_1 + X_2 \leq 14 \\ 3x_1 + X_2 \geq 2 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \;,\; x_2 \geq 0$$

نحول البرنامج الى الصيغة القانونية

$$\text{M ax } z_1 = 10x_1 + 30x_2$$

$$S/C \begin{cases} 3X_1 + 2X_2 \leq 6 \\ 6X_1 + X_2 \leq 14 \\ -3x_1 - X_2 \leq -2 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \;,\; x_2 \geq 0$$

البرنامج الثنائي هو:

$$\text{MIN } W_1 = 6Y_1 + 14Y_2 - 2Y_3$$

$$S/C \begin{cases} 3Y_1 + 6Y_2 - 3Y_3 \geq 10 \\ 2Y_1 + Y_2 - Y_3 \geq 30 \end{cases}$$

$$Y_1 \geq 0 \;,\; Y_2 \geq 0, \; Y_3 \geq 0$$

البرنامج الثاني:

$$\text{M in } z_2 = 2x_1 + x_2$$

$$S/C\begin{cases} 2X_1 - X_2 \geq -2 \\ X_1 - X_2 \leq 2 \\ -x_1 + X_2 \leq -5 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$$

نحول البرنامج الى الصيغة القانونية

$$\text{M in } z_2 = 2x_1 + x_2$$

$$S/C\begin{cases} 2X_1 - X_2 \geq -2 \\ -X_1 + X_2 \geq -2 \\ x_1 - X_2 \geq 5 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$$

البرنامج الثنائي هو:

$$\text{Max } W_2 = -2Y_1 - 2Y_2 + 5Y_3$$

$$S/C\begin{cases} 2Y_1 - Y_2 + Y_3 \leq 2 \\ -Y_1 + Y_2 - Y_3 \leq 1 \end{cases}$$

$$Y_1 \geq 0 \quad , \quad Y_2 \geq 0, \quad Y_3 \geq 0$$

البرنامج الثالث:

$$\text{M in } z_3 = -x_1 + 2x_2$$

$$S/C\begin{cases} -5X_1 - 3X_2 = 30 \\ X_1 - X_2 \leq 2 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \forall$$

نحول البرنامج الى الصيغة القانونية

$$\text{M in } z_3 = -x_1 + 2x_2$$

$$S/C\begin{cases} -5X_1 - 3X_2 = 30 \\ -X_1 + X_2 \geq -2 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \forall$$

البرنامج الثنائي هو:

$$\text{Max } W_3 = 30Y_1 - 2Y_2$$

$$S/C\begin{cases} -5Y_1 - Y_2 \leq -1 \\ -3Y_1 + Y_2 = 2 \end{cases}$$

$$Y_1 \forall \quad , \quad Y_2 \geq 0$$

البرنامج الرابع:

$$Max\ z_4 = 9x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4$$

$$s/c\begin{cases} 3X_1 + 5X_2 + 10x_3 + x_4 \geq 100 \\ -4X_1 - X_2 - x_4 \geq -50 \\ x_1 + X_2 + 7x_3 + 7x_4 = 20 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0 \quad x_3\ \forall \ , \ x_4 \geq 0$$

نحول البرنامج الى الصيغة القانونية

$$\text{Max}\ z_4 = 9x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4$$

$$s/c\begin{cases} -3X_1 - 5X_2 - 10x_3 - x_4 \leq -100 \\ 4X_1 + X_2 + x_4 \leq 50 \\ x_1 + X_2 + 7x_3 + 7x_4 = 20 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0 \quad x_3\ \forall \ , \ x_4 \geq 0$$

البرنامج الثنائي هو:

$$\text{Min}\ W_4 = -100Y_1 + 50Y_2 + 20Y_3$$

$$S/C\begin{cases} -3Y_1 + 4Y_2 + Y_3 \geq 9 \\ -5Y_1 + Y_2 + Y_3 \geq 2 \\ -10Y_1 + 7Y_3 = 4 \\ -Y_1 + Y_2 + 7Y_3 \geq 1 \end{cases}$$

$$Y_1 \geq 0 \ , \ Y_2 \geq 0, \ Y_3 \forall$$

التمرين الثاني: تهدف مؤسسة إلى تعظيم إرباحها الناتجة عن بيع سلعتين $A\ B$ التي يتطلب إنتاجهما المرور بــ3آلات، يمكن تلخيص الأرباح الناتجة من بيع السلعتين وطاقات الآلات في البرنامج التالي:

$$\text{Max}\ z = 10x_1 + 30x_2$$

$$S/C\begin{cases} 3X_1 + 2X_2 \leq 6 \\ 6X_1 + X_2 \leq 14 \\ 3x_1 + X_2 \geq 2 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0$$

1- حل البرنامج باستخدام أسلوب السمبلكس.

2- ابحث عن الشكل الثنائي ثم أوجد حله الأمثل.

3- قارن نتائج الحل في البرنامجين، ماذا تستنتج؟

الحل:

1- جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي هو:

م/ق	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b_i
Z	0	0	$\frac{9}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	30
X_1	1	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	6
X_2	0	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	8
S_3	0	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	1	8

$W = 30$

$S_1 = 0 , S_2 = 0$

حلول البرنامج الثنائي

$Y_1 = \frac{9}{5} , Y_2 = \frac{2}{5} , Y_3 = 0$

$$\text{Min } W = 14Y_1 + 12Y_2 + 12Y_3$$

$$S/C\begin{cases} Y_1 - 2Y_2 + 2Y_3 \geq 1 \\ Y_1 + 3Y_2 - Y_3 \geq 3 \end{cases}$$

$$Y_1 \geq 0 \ , \ Y_2 \geq 0, \ Y_3 \geq 0$$

-جدول الحل الأمثل هو:

م/ق	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	R_1	R_2	b_i
W	0	0	-8	-6	-8	$6-M$	$8-M$	30
Y_1	1	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{9}{5}$
Y_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

$Z = 30$

$S_1 = 0 , S_2 = 0, S_3 = 8$

حلول البرنامج الأولي

$x_1 = 6 , x_2 = 8$

3-المقارنة بين نتائج البرنامجين:

من جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي وجدنا أن $X_1 = 6$ وهي تقابل قيمة S_1 بالقيمة المطلقة في سطر دالة الهدف في جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي، كما أن $X_2 = 8$ وهي تقابل قيمة S_2 بالقيمة المطلقة في سطر دالة الهدف في جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي.

وإذا ما نظرنا إلى سطر دالة الهدف في جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي نجد أن S_1 تقابلها القيمة $\frac{9}{5}$ وهي قيمة Y_1 في البرنامج الثنائي، أماS_2 فتقابلها القيمة $\frac{2}{5}$ وهي قيمة Y_2 في البرنامج الثنائي، أماS_3 فتقابلها القيمة 0 وهي قيمة Y_3 في البرنامج الثنائي يتم هذا التقابل على وجه الترتيب مع إهمال الإشارة السالبة، كما أن قيمة الدالة الاقتصادية متساوية في جدول الحل الأمثل للبرنامجين أي W=Z=30.

ومنه نستنتج أن جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي يتضمن أيضا الحل الأمثل للبرنامج الثنائي، وجدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي يتضمن أيضا الحل الأمثل للبرنامج الأولي، وإذا كان هناك حل أمثل للنموذج الثنائي، فإن هناك حل أمثل للنموذج الأولي، والعكس صحيح، أيضاً يمكن القول بأن قيم المتغيرات الأساسية عند الحل الأمثل للنموذج الثنائي، مساوية لأسعار الظل في جدول الحل الأمثل للنموذج الأولي، أي أن قيم متغيرات القرار عند الحل الأمثل للنموذج الثنائي تبين مقدار الوحدة الإضافية من الموارد أو المدخلات.

التمرين الثالث:

افرض أنه لدينا النموذج الأولي الآتي:

$$\text{Min } Z = 3X_1 + 2X_2$$

$$S/C \begin{cases} 4X_1 + 2X_2 \geq 4 \\ 5X_1 + 4X_2 \geq 8 \\ 2X_1 + 3X_2 \leq 5 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \geq 0$$

-أوجد الحل الأمثل باستخدام طريقة السمبلكس المقابلة.

الحل:

لتطبيق طريقة السمبلكس المقابلة يجب تحويل إشارة القيود إلى أصغر أو يساوي، وكذلك جعل الطرف الأيمن سالبا بضرب القيدين الأول والثاني في (-1) وبإضافة متغيرات الفجوة نحصل على الشكل القياسي التالي:

$$\text{Min } Z - 3X_1 - 2X_2 = 0$$

$$S/C\begin{cases}-4X_1 - 2X_2 + S_1 = -4\\ -5X_1 - 4X_2 + S_2 = -8\\ 2X_1 + 3X_2 + S_3 = 5\end{cases}$$

$$X_1 \geq 0\ ,\ X_2 \geq 0, \qquad S_1 \geq 0\,, S_2 \geq 0\ , S_3 \geq 0$$

بوضع الشكل القياسي في جدول الحل الابتدائي نحصل على مايلي:

م/ق	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b_i
Z	-3	-2	0	0	0	0
S_1	-4	-2	1	0	0	-4
S_2	-5	-4	0	1	0	-8
S_3	2	3	0	0	1	5

من الجدول نجد أن الحل الابتدائي غير مقبول حيث أن قيم متغيرات القاعدة سالبة، $S_1 = -4$، $S_2 = -8$

نختار المتغير الخارج على أنه المتغير الذي له أكبر قيمة بالسالب، وهوS_2 لأنه يقابل القيمة -3 في عمود الثوابت.

المتغير الداخل هو الذي يقابل أقل نسبة ناتجة من حاصل قسمة معاملات المتغيرات في دالة الهدف على القيم التي تقابلها في سطر المتغير الخارج، وهو المتغير X_2 ، وبذلك نحصل على الجدول التالي:

م/ق	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b_i
Z	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	4
S_1	$-\frac{3}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	0
X_2	$\frac{5}{4}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	0	2
S_3	$-\frac{7}{4}$	0	0	$\frac{3}{4}$	1	-1

نلاحظ من خلال الجدول أن الحل ليس أمثلا، إذن المتغير الخارج هو S_3 ، أما المتغير الداخل فهو X_1 ، وبذلك نحصل على الجدول التالي:

م/ق	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b_i
Z	0	0	0	$-\frac{5}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{30}{7}$
S_1	0	0	1	$-\frac{8}{7}$	$-\frac{6}{7}$	$\frac{6}{7}$
X_2	0	1	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{9}{7}$
X_1	1	0	0	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{4}{7}$	$\frac{4}{7}$

نلاحظ أن جميع قيم عمود الثوابت موجبة، كما أن معاملات دالة الهدف سالبة أو صفرية إذن الحل أمثل:

$X_1 = \frac{4}{7}$ ، $X_2 = \frac{9}{7}$ ، $S_1 = \frac{6}{7}$ ، $S_2 = 0$ ، $S_3 = 0$ ، $Z = \frac{30}{7}$.

تمارين للحل:

التمرين الأول: أوجد البرنامج الثنائي للبرامج التالية:

$\text{M ax } z_1 = 5x_1 + 10x_2$ $S/C \begin{cases} 3X_1 - 7X_2 \leq 20 \\ -X_1 - X_2 \leq -2 \\ 4x_1 + 8X_2 \leq 30 \\ -4x_1 - 8X_2 \leq -30 \end{cases}$ $x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$	$\text{Min } z_2 = 100x_1 + 60x_2$ $S/C \begin{cases} 8X_1 + 4X_2 \geq 20 \\ 2X_1 + 4X_2 \geq 15 \\ 8x_1 + 4X_2 \geq 15 \end{cases}$ $x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$

Min $z_3 = 2x_1 + X_2$	Max $z_4 = x_1 + x_2 - x_3 - x_4$
$S/C\begin{cases} 3X_1 + X_2 = 3 \\ 4X_1 + 3X_2 \geq 6 \\ X_1 + 2X_2 \leq 3 \end{cases}$	$S/C\begin{cases} 3X_1 - 2X_2 + x_3 + 5x_4 \leq 18 \\ 5X_1 + 6X_2 \geq 20 \\ x_1 - X_2 + 4x_3 + x_4 = 9 \end{cases}$
$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$	$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0 \qquad x_3 \forall \; , \; x_4 \geq 0$

التمرين الثاني: ليكن لدينا النموذج الخطي التالي:

$$\text{Min } z = 5x_1 + 2x_2$$

$$S/C\begin{cases} X_1 + 2X_2 \geq 5 \\ 2X_1 - X_2 \geq 12 \\ X_1 + 3X_2 \geq 4 \end{cases}$$

$$X_1 \forall \quad , X_2 \geq 0$$

1- حل البرنامج باستخدام أسلوب السمبلكس.

2- ابحث عن الشكل الثنائي ثم أوجد حله الأمثل.

3- قارن نتائج الحل في البرنامجين.

التمرين الثالث:

افرض أنه لدينا النموذج الأولي الآتي:

$$\text{Min } Z = 2X_1 + X_2$$

$$S/C\begin{cases} 3X_1 + X_2 \geq 3 \\ 4X_1 + 3X_2 \geq 6 \\ X_1 + X_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 \; , \; X_2 \geq 0$$

-أوجد الحل الأمثل باستخدام طريقة السمبلكس المقابلة.

المحور الرابع:

تحليل الحساسية

المحور الرابع: تحليل الحساسية.

تمهيد:

بعد الوصول إلى الحل الأمثل لأي نموذج رياضي يعبر عن نشاطات مشروع أو مصنع ما، قد ترغب إدارة المشروع أو المصنع في أحداث بعض التغييرات على النموذج الأولي الذي يعبر عن نشاطات ذلك المشروع أو المصنع كزيادة الموارد المتاحة، رأس المال، عدد العمال، عدد الآلات والزمن المتاح....إلخ، مثل هذه التغيرات تؤدي إلى تغير النموذج الذي يعبر عن نشاطات ذلك المشروع، مما يترتب عليه إعادة حل النموذج الرياضي، وهي عملية مرهقة وتحتاج إلى وقت طويل ولكن يمكن استخدام طريقة لا تتطلب إعادة الحل بكامله هي تحليل الحساسية، تسمى أيضا بتحليل ما بعد الأمثلية التي تدرس أثر التغييرات على النموذج الأولي بالاعتماد على جدول الحل الأمثل، وحساب أثر هذه التغيرات مباشرة دون اللجوء إلى حل النموذج مجددا، إن التغييرات التي يمكن أن تحدث على النموذج الأولي يمكن تصنيفها كالآتي:

أولا: التغييرات في الطرف الأيمن للقيود.

إن التغير في الطرف الأيمن للقيود قد يؤدي إلى جعل المسألة غير مجدية أو قد تبقى مجدية ولكن تتغير قيم المتغيرات ويتم إدخال هذه التغييرات وحساب أثرها على الحل الأمثل مباشرة، يمكن توضيح ذلك من خلال إيجاد:

أ–سعر الظل: هو عبارة عن مقدار الزيادة أو النقص في قيمة دالة الهدف الناتج عن زيادة أو نقص الموارد المتاحة، أيضا هو عبارة عن الربح الإجمالي الناتج عن إضافة وحدة واحدة جديدة من الموارد النادرة، ويمكن التعبير عن سعر الظل بأنه المبلغ الذي ترغب المؤسسة في دفعه للحصول على الموارد الإضافية، حيث أنها لا يمكن أن تحقق ربحا أكثر من هذا المبلغ إذا زادت أيا من الموارد بمقدار وحدة واحدة، يمكن الحصول على المعلومات المتعلقة بأسعار الظل من قيم سطر دالة الهدف المقابلة للمتغيرات الراكدة(الفجوة، الفائضة) في جدول الحل الأمثل[45]، ولتوضيح هذه النقطة نفترض أن لدينا المشكلة التالية:

[45] – جهاد صياح بني هاني وآخرون، مرجع سبق ذكره، ص 120.

$$\text{Max } z_1 = 30x_1 + 50x_2$$

$$S/C \begin{cases} 2X_1 + X_2 \leq 16 \\ X_1 + 2X_2 \leq 11 \\ x_1 + 3X_2 \leq 15 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$$

وكان جدول الحل الأمثل كالآتي:

م/ق	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	b_i
Z	0	0	$\frac{10}{3}$	$\frac{70}{3}$	0	310
S_3	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	1	2
X_2	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	7
X_1	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	2

بناءا على قيم سطر z المقابلة للمتغيرات الراكدة في جدول الحل الأمثل(تمثل نتيجة الحل للنموذج المقابل في الجدول الأخير)، فإن سعر ظل المورد الأول هو$\frac{10}{3}$ وسعر ظل المورد الثاني هو $\frac{70}{3}$ وسعر ظل المورد الثالث هو صفر، هذه النتائج تعني أن زيادة وحدة واحدة من أي مورد ستؤدي إلى زيادة قيمة دالة الهدف بمقدار سعر الظل، وستؤثر هذه الزيادة على نتيجة الحل الأساسي في جدول الحل الأمثل.

لدينا قيم الطرف الأيمن هي: $b_1=16$، $b_2=11$، $b_3=15$، ندرس تأثير تغير قيمة b_1, b_2, b_3، على الحل الأمثل، فلو فرضنا أن الجانب الأيمن للمشكلة تغير وأصبح من $\begin{bmatrix} 16 \\ 11 \\ 15 \end{bmatrix}$ إلى $\begin{bmatrix} 20 \\ 11 \\ 15 \end{bmatrix}$ أي حدثت زيادة في المورد الأول من 16 إلى 20.

لدراسة تأثير التغير في متجه الموارد يتطلب الأمر إثبات بأن متجه الموارد الجديد يبقى موجب، وهذا لا يتطلب حل مسالة البرمجة الخطية ثانية، حيث أن أي عمود في جدول السمبلكس النهائي والذي يمثل الحل

الأمثل يمكن أن نحصل عليه بضرب العمود المناظر له في جدول السمبلكس الأولي في المصفوفة تحت المتغيرات الراكدة، حسب المثال نحصل على:

$$\begin{bmatrix} S_3 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 11 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{3} - \frac{55}{3} + 15 \\ \frac{40}{3} - \frac{11}{3} + 0 \\ -\frac{20}{3} + \frac{22}{3} + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{29}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن جميع قيم العمود الناتج موجبة وهذا يعني أن الحل الأمثل لا يزال ممكنا بالقيم الجديدة، أما الحل الناتج فهو: $X_1=\frac{29}{3}$, $X_2=\frac{2}{3}$, $S_1=S_2=0$, $S_3=\frac{10}{3}$

وبناءا على القيم الجديدة للطرف الأيمن يتم إعادة حساب قيمة دالة الهدف الجديدة على النحو التالي:

$$z = 30\left(\frac{29}{3}\right) + 50\left(\frac{2}{3}\right) = 323.33$$

يتبين لنا أن زيادة وحدة واحدة من المورد الأول تؤدي إلى زيادة قيمة دالة الهدف بمقدار سعر الظل ($\frac{10}{3}$)، ويتحقق ذلك في هذه الحالة حيث أن المورد الأول قد ارتفع بمقدار 4 وحدات وحصلنا على الآتي:

$$z = \left(\frac{10}{3}\right)(4) + 310 = 323.33$$

كذلك فإن زيادة وحدة واحدة من المورد الثاني تؤدي إلى زيادة دالة الهدف بمقدار سعر الظل ($\frac{70}{3}$)، أما المورد الثالث فإن أية زيادة فيه لا تحقق زيادة في دالة الهدف (سعر الظل= 0).

السؤال الذي يطرح نفسه هنا هو: **إلى أي مدى تستطيع المؤسسة زيادة كميات الموارد المتاحة لديها وبالتالي زيادة أرباحها ؟**

يمكن الإجابة على هذا السؤال من خلال إيجاد ما يسمى بمدى الإمكانية.

ب– مدى الإمكانية: يمكننا من خلال مدى الإمكانية تحديد عدد الوحدات من أي مورد (ساعات العمل مثلا) التي يمكننا إضافتها أو التخلص منها دون أن يؤثر ذلك في سعر الظل الخاص بالمورد، أي أن نبقى ضمن

مزيج الحل الأمثل، وبذلك يهدف مدى الإمكانية إلى تحديد الحد الأعلى والحد الأدنى لقيم الطرف الأيمن لقيود نموذج البرمجة الخطية(الموارد المتاحة)، ولتحديد مدى الإمكانية نتبع الخطوات التالية:[46]

- قسمة عمود الكميات في الحل النهائي على معاملات العوامل الحرة أو غير الأساسية المقابلة لها، فمثلا إذا أردنا إيجاد حدود الكميات للقيد الأول فإننا نقسم عمود الكميات على المعاملات S_1، وبالنسبة للقيد الثاني نقسم الكميات على المعاملات S_2 وهكذا.
- تؤخذ أقل قيمة موجبة ونطرح منها الكمية الأساسية للحصول على الحد الأدنى لكمية القيد.
- تؤخذ القيمة المطلقة لأكبر قيمة سالبة وتضاف إلى الكمية الأساسية للحصول على الحد الأعلى للكمية.
- في حالة عدم الحصول على نتائج من إشارة معينة فإننا نأخذ ما لا نهاية تلك الإشارة سواءا بالسالب أو بالموجب.

وبتطبيق الخطوات السابقة نجد:

1-مدى الإمكانية للكمية التي تمثل الطرف الأيمن للقيد الأول (b_1):

أ-1: نجد مدى التغير (Δ b_1) على النحو التالي:

$$b_1 \quad : 2\frac{1}{3} \quad 7\frac{2}{3} \quad -2\frac{1}{3} \quad \div\Delta$$

6	10.5	-6

أ-2: نجد المدى باستخدام الصيغة المشار إليها سابقا، حيث أن الكمية الأصلية للطرف الأيمن في القيد الأول هي 16 وحدة لذلك فإن المدى:

$$16-6=10$$
$$16+6=22$$

بناءا على النتائج السابقة فإن مدى الإمكانية للقيد الأول هو:

$$10 \leq b_1 \leq 22$$

[46] – محمد أحمد الطراونة، سليمان خالد عبيدات، مرجع سبق ذكره، ص 175

وهذا يعني أن مادامت الكمية المتاحة من المورد الأول بين 10 و 22 لن يتغير سعر ظل المورد الأول، وسيبقى الحل أمثل.

2-مدى الإمكانية للكمية التي تمثل الطرف الأيمن للقيد الثاني(b_2):

لإيجاد مدى الإمكانية يمكن استخدام الطريقة السابقة أو طريقة أخرى حيث تحدد لنا مقدار مدى التغير وفقا للعلاقة التالية:

$$\begin{bmatrix} \text{قيم عمود الطرف} \\ \text{في جدول الحل الأمثل} \end{bmatrix} + [\Delta\, \mathrm{bi}\,] + \begin{bmatrix} \text{قيم عمود المتغيرالراكد} \\ \text{في جدول الحل الأمثل} \end{bmatrix} \geq 0$$

بتطبيق ذلك على القيد الثاني نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} [\Delta\, \mathrm{b2}\,] + \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \geq 0$$

نقوم بتكوين المتراجحات التالية وحلها فجد:

$$2 - \frac{5}{3}\Delta\, \mathrm{b2} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\, \mathrm{b2} \leq \frac{6}{5}$$

$$2 - \frac{1}{3}\Delta\, \mathrm{b2} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\, \mathrm{b2} \leq 21$$

$$2 + \frac{2}{3}\Delta\, \mathrm{b2} \geq 0 \;\Rightarrow \Delta\, \mathrm{b2} \leq -3$$

بناءا على هذه النتائج نجد مدى تغير المورد الثاني هو:

$$-3 \leq b_2 \leq \frac{6}{5}$$

بعد استخراج مدى التغير المسموح به من المورد الثاني، بحيث يبقى الحل أمثل نقوم بحساب مدى الإمكانية، وذلك بإضافة الحد الأعلى(أقل قيمة موجبة) لمدى التغير إلى الكمية الأصلية للمورد، وإضافة الحد الأدنى (أكبر قيمة سالبة) لمدى التغير من الكمية الأصلية للمورد الأصلي على النحو التالي:

$$11-3 \leq b_2 \leq 11+\frac{6}{5}$$
$$8 \leq b_2 \leq 12.2$$

بصفة عامة في حالة وجود أكثر من حد أعلى نأخذ القيمة الأصغر، وفي حالة وجود أكثر من حد أدنى نأخذ القيمة الأكبر، ومنه فإن الحد الأعلى للكمية المتاحة من المورد الثاني هي 12.2 والحد الأدنى منها هو 8.

ملاحظة: إذا كان المتغير الراكد التابع لأحد القيود ضمن مزيج الحل الأساسي(داخل في قاعدة الحل) في جدول الحل الأمثل، فإن هذا يشير إلى وجود كمية إضافية من هذا المورد، ويعني ذلك أن الحد الأعلى لمدى الإمكانية الخاص بهذا المورد مفتوح (غير محدد، لا نهائي) والحد الأدنى يساوي الكمية الأصلية للمورد مطروحا منها قيمة المتغير الراكد التابع للقيد في جدول الحل الأمثل[47].

ولتوضيح هذه النقطة نعود إلى جدول الحل الأمثل حيث نلاحظ أن المتغير الراكد التابع للمورد الثالث هو متغير أساسي وقيمته هي 2، وهذا يعني وجود كمية زائدة من المورد الثالث بمقدار وحدتين، وبالتالي فإن الحد الأعلى لمدى إمكانية المورد الثالث مفتوح وحده الأدنى يساوي الكمية الأصلية 15 مطروحا منها مقدار الزيادة 2، فيكون مدى الإمكانية للمورد الثالث على النحو التالي:

$$13 \leq b_3 \leq \infty$$

ثانيا: التغيرات في معاملات دالة الهدف (**مدى الأمثلية**):

من أجل أن نحدد مقدار الزيادة أو النقص الذي يمكن أن يحدث في هامش الربح (**C**) الأحادي لأي من المنتجات التي تدخل في برنامج الإنتاج الأمثل، والتي لا تؤدي إلى تغير في برنامج الحل الأمثل، فإننا نقوم بما يلي[48]:

---

47 - جهاد صياح بني هاني وآخرون، مرجع سبق ذكره، ص 126.

48 - مكيد علي، مرجع سبق ذكره، ص ص 152-153.

- نضرب معاملات دالة الهدف في جدول الحل الأمثل في(1-).
- نقوم بقسمة معاملات دالة الهدف غير الصفرية الموجودة في جدول الحل الأمثل بعد ضربها في (1-)، نقسمها على صف معاملات المتغير الأصلي الموجود في قاعدة الحل، الذي نرغب في معرفة التغيرات في هامش الربح الخاص به (معاملاته في القيود الفنية).
- من بين القيم المتحصل عليها نأخذ أصغر ناتج قسمة موجب وأكبر ناتج قسمة سالب، الأول يمثل أقصى زيادة يمكن إضافتها إلى هامش الربح للمنتج المعني، والثاني يمثل أقصى تخفيض يمكن إنقاصه من هامش الربح للمنتج المعني.
- إذا لم توجد قيمة موجبة، فإن أقصى مبلغ يمكن زيادته هو(∞)، وكذلك إذا لم توجد قيم سالبة فإن أكبر مبلغ يمكن تخفيضه هو الصفر (0)، يجب الإشارة إلى أنه يجب تجاهل القيم الصفرية.

بالرجوع إلى مثالنا السابق نحاول استخراج مجال تغير هامش الربح للمنتجين x_1 و x_2 كالآتي:

أ- مجال تغير C_1 الذي لا يؤثر على الحل الأمثل:

بعد ضرب معاملات دالة الهدف في 1- وقسمتها على سطر المعاملات غير الصفرية للمتغير x_1 في القيود الفنية نحصل على القيم التالية: $-\frac{1}{3} \div -\frac{70}{3}$ ، $\frac{2}{3} \div -\frac{10}{3}-$

ومنه نحصل على القيم التالية: 70، 5-

وحسب القواعد المشار إليها سابقا يكون مجال تغير هامش الربح للمنتج الأول الذي لا يؤثر على الحل الأمثل هو:

$$-5 \leq C_1 \Delta \leq 70$$

أي أن الحد الأعلى والأدنى لهذا التغير هو:

$$C1 - 5 \leq C_1 \leq C1 + 70$$
$$30 - 5 \leq C_1 \leq 30 + 70$$
$$25 \leq C_1 \leq 100$$

ب- مجال تغير C_2 الذي لا يؤثر على الحل الأمثل:

بعد ضرب معاملات دالة الهدف في -1 وقسمتها على سطر المعاملات غير الصفرية للمتغير x_2 في القيود الفنية نحصل على القيم التالية: $\frac{2}{3} \div -\frac{70}{3}$ ، $-\frac{1}{3} \div -\frac{10}{3}$

ومنه نحصل على القيم التالية: 35-، 10

إذن مجال تغير هامش الربح C_2 الذي لا يؤثر على الحل الأمثل هو:

$$-35 \leq \Delta C_2 \leq 10$$

أي أن الحد الأعلى والأدنى لهذا التغير هو:

$$-35 + 50 \leq C_2 \leq 10 + 50$$

$$15 \leq C_2 \leq 60$$

ثالثا: التغيرات في معاملات متغيرات القرار في القيود:

إن التغيرات في معاملات متغيرات القرار لا تؤثر مباشرة على عناصر مصفوفة الحل والتي تؤدي إلى التعقيد في الحسابات، ويمكن أن تؤثر على الجانب الأيسر لقيود المشكلة المقابلة المتعلقة بها، وقد تجعل من الحل الحالي للمشكلة غير ممكن أو غير مثالي، وعليه فإن تحليل الحساسية في هذه الحالة لن يعطي بيانات مباشرة فيما يتعلق بمثالية أو إمكانية حل المشكلة ولذلك يفضل إعادة حل المشكلة كمشكلة جديدة بالطريقة المبسطة[49].

رابعا: إضافة متغير أو متغيرات جديدة:

إن إضافة متغير جديد إلى المشكلة الأصلية قد يؤثر على أمثلية الحل، لأن المتغير الجديد قد يصبح متغيرا أساسيا وبالتالي سيكون له دور في تحسين الحل، فإذا لم تكن القدرة لهذا المتغير لدخول عمود المتغيرات الأساسية، معنى ذلك أن قيمته تساوي صفر، لكنه سوف يظهر في عمود المتغيرات غير الأساسية[50].

[49] - دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، مرجع سبق ذكره، ص 128.

[50] -حسين محمود الجنابي، مرجع سبق ذكره، ص 167.

يمكن الاعتماد على نتيجة الحل الأمثل لاحتساب قيم عمود المتغير الجديد الذي تمت إضافته باستخدام الصيغة التالية:

$$\begin{bmatrix} \text{القيم الجديدة لعمود المتغير الجديد} \\ \text{في جدول الأمثل} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{مصفوفة المتغيرات الراكدة} \\ \text{في الحل الأمثل} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{عمود القيم الأساسية} \\ \text{للمتغير الجديد} \end{bmatrix}$$

وبناءا على هذه الصيغة يتم إعادة حساب قيم سطر دالة الهدف واختبار مدى أمثلية الحل حسب طبيعة دالة الهدف، إن لم يكن الحل أمثل يجب الاستمرار في عملية الحل.

لو فرضنا أننا أضفنا متغيرا جديدا للمشكلة الأصلية وهو x_3 ، معاملات المتغير في القيود الثلاثة هي: 4، 2، 3 أما معامله في دالة الهدف يساوي 40.

عملية حساب قيم عمود x_3 في جدول الحل تتم كمايلي:

$$x_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نأخذ القيم في سطر دالة الهدف والتي تقع تحت المتغيرات الراكدة ونضربها في معاملات المتغير الجديد كما يلي:

$$4\left(\frac{10}{3}\right) + 2\left(\frac{70}{3}\right) + 3(0) = 60$$

وهي قيمة أكبر من قيمة معامل المتغير x_3 في سطر دالة الهدف (40)، هذا يعني أن المتغير الجديد x_3 سوف لن يظهر كمتغير أساسي في جدول الحل الأمثل، وستكون قيمته في سطر دالة الهدف مساوية للفرق بين القيمة التي حصلنا عليها سابقا مطروحا منها قيمة معامل المتغير x_3 في سطر دالة الهدف أي: 20=40-60، وبذلك يكون جدول الحل الأمثل كما يلي:

م/ق	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	b_i
Z	0	0	20	$\frac{10}{3}$	$\frac{70}{3}$	0	310
S_3	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	1	2
X_2	1	0	2	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	7
X_1	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	2

نلاحظ من الجدول أن الحل لا يزال أمثلا لأن معامل x_3 في سطر دالة الهدف موجب.

أما لو فرضنا أن معامل x_3 في دالة الهدف هو 65 وعليه يكون معامله في سطر دالة الهدف في جدول الحل الأمثل مساويا لـ:-5 =60-65، عندئذ يصبح الجدول الأخير كمايلي:

م/ق	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	b_i
Z	0	0	-5	$\frac{10}{3}$	$\frac{70}{3}$	0	310
S_3	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	1	2
X_2	1	0	2	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	7
X_1	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	2

نلاحظ أن الحل ليس أمثلا لذا لابد من تحسين الحل باختيار x_3 كمتغير داخل وتكملة الحل إلى غاية الوصول إلى الحل الأمثل.

خامسا: إضافة قيد أو قيود جديدة

قد يؤثر إضافة قيد جديد للمشكلة على الحل الأمثل ويمكن معرفة ذلك من خلال فحص القيد إذا كان محققا أم لا، إذا كان القيد محققا هذا يعني أن الحل الأمثل سوف يبقى كما هو ماعدا المتغير الراكد لذلك القيد الذي سيظهر في عمود متغيرات القاعدة[51]، فلو فرضنا أن القيد المراد إضافته للمشكلة هو:

$$x_1 + 4x_2 \leq 16$$

نقوم بفحص القيد أي التأكد من أن القيد محقق باستخدام قيم الحل الأمثل كالآتي:

$$7 + 4(2) \leq 16$$

$$15 \leq 16$$

إذن القيد يستوفي شروط الأمثلية وجدول الحل الأمثل سوف يبقى كما هو، وعليه يمكن اعتبار هذا القيد قيدا فائضا لا تأثير له على الحل.

أما إذا فرضنا أن القيد الجديد سيكون كما يلي:

$$x_1 + 4X_2 \leq 13$$

بتعويض قيم x_1 و x_2 في جدول الحل الأمثل نحصل على :

$$7 + 4(2) \leq 13$$

$$15 \leq 13$$

هذا يعني أن القيد غير محقق أي أن إضافة هذا القيد لا تحقق الحل الأمثل مما يتطلب تحسين الحل من خلال:

- تحويل القيد إلى الصيغة القياسية كما يلي:

$$x_1 + 4X_2 + S_4 = 13$$

- نضيف معادلة القيد الجديد إلى جدول الحل الأمثل بعد استخراج قيم x_1 و x_2 وتعويضها في القيد الجديد للحصول على قيم السطر S_4.

---

[51] - حسين محمود الجنابي، مرجع سبق ذكره، ص 163.

❖ سطر x_1 في جدول الحل الأمثل هو:

$$x_1 + \frac{2}{3}S_1 - \frac{1}{3}S_2 = 7$$

ومنه:

$$x_1 = 7 - \frac{2}{3}S_1 + \frac{1}{3}S_2$$

❖ سطر x_2 في جدول الحل الأمثل هو:

$$x_2 - \frac{1}{3}S_1 + \frac{2}{3}S_2 = 2$$

ومنه:

$$x_2 = 2 + \frac{1}{3}S_1 - \frac{2}{3}S_2$$

وبتعويض قيم x_1 و x_2 في القيد الجديد نحصل على ما يلي:

$$x_1 + 4X_2 + S_4 = 13$$

$$(7 - \frac{2}{3}S_1 + \frac{1}{3}S_2) + 4(2 + \frac{1}{3}S_1 - \frac{2}{3}S_2) + S_4 = 13$$

$$S_4 + \frac{2}{3}S_1 - \frac{7}{3}S_2 = -2$$

ومنه جدول الحل الأمثل يكون كما يلي:

م/ق	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	b_i
Z	0	0	$\frac{10}{3}$	$\frac{70}{3}$	0	0	310
S_3	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	1	0	2
X_2	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	7
X_1	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1	2
S_4	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{7}{3}$	0	1	-2

نلاحظ من خلال الجدول أن هناك قيمة سالبة في عمود الثوابت للمتغير S_4 مقدارها -2 مما يجعل الحل الأمثل غير ممكن، ويتطلب ذلك تحسين الحل باستخدام طريقة السمبلكس المقابلة للتخلص من قيمة S_4 السالبة.

تمارين محلولة:

التمرين الأول:

يبين الجدول أدناه الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية الآتي:

$$\text{M ax } z_1 = 10x_1 + 15x_2$$

$$S/C \begin{cases} 3X_1 + 2X_2 \leq 15000 \\ X_1 + 2X_2 \leq 10000 \\ x_1 \leq 7000 \\ x_2 \leq 8000 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$$

جدول الحل الأمثل هو:

م/ق	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	b_i
Z	0	0	1.25	6.25	0	0	81250
X_1	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	2500
X_2	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	0	3750
S_3	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	4500
S_4	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0	1	4250

المطلوب:

1- أوجد مدى الأمثلية لمعاملات متغيرات القرار في دالة الهدف.

2- افترض أن معامل X_1 في دالة الهدف ارتفع بمقدار 2، فما هو الحل الأمثل الجديد؟

3- أوجد المدى الذي تبقى فيه أسعار الظل سارية المفعول (مدى الإمكانية).

4- إذا توفرت 1000 ساعة عمل إضافية في القيد الأول فما هو الحل الأمثل الجديد؟

5- إذا انخفضت الساعات المتاحة في القيد الثاني بمقدار 500 ساعة فما هو الحل الأمثل الجديد؟

الحل:

1- إيجاد مدى الأمثلية لمعاملات متغيرات القرار في دالة الهدف:

- مجال تغير C_1 الذي لا يؤثر على الحل الأمثل:

بعد ضرب معاملات دالة الهدف في 1- وقسمتها على سطر المعاملات غير الصفرية للمتغير x_1 في القيود الفنية نحصل على القيم التالية: $-\frac{1}{2} \div 6.25 -$ ، $\frac{1}{2} \div 1.25-$

إذن مدى أو مجال تغير C_1 هو:

$$-2.5 \leq C_1 \Delta \leq 12.5$$

معامل X_1 في دالة الهدف هو 10 وعليه يكون الحد الأعلى والأدنى لهذا التغير هو:

$$10 - 2.5 \leq C_1 \leq 10 + 12.5$$
$$7.5 \leq C_1 \leq 22.5$$

هذا يعني أن معامل X_1 في دالة الهدف يمكن أن يرتفع لغاية 22.5 أو ينخفض لغاية 7.5 دون أن يؤثر على قيمة المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل.

- مجال تغير C_2 الذي لا يؤثر على الحل الأمثل:

بعد ضرب معاملات دالة الهدف في -1 وقسمتها على سطر المعاملات غير الصفرية للمتغير x_2 في القيود الفنية نحصل على القيم التالية: $-6.25 \div \frac{3}{4}$ ، $-1.25 \div -\frac{1}{4}$

إذن مدى أو مجال تغير C_2 هو:

$$-\frac{25}{3} \leq C_1 \Delta \leq 5$$

معامل x_2 في دالة الهدف هو 15 وعليه يكون الحد الأعلى والأدنى لهذا التغير هو:

$$15 - \frac{25}{3} \leq C_2 \leq 5 + 15$$
$$6.67 \leq C_2 \leq 20$$

هذا يعني أن معامل X_2 في دالة الهدف يمكن أن يرتفع لغاية 20 أو ينخفض لغاية 6.67 دون أن يؤثر على قيمة المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل.

2–طالما أن زيادة معامل X_1 كانت بمقدار 2 أي أصبح المعامل 12 فإنه لا زال ضمن المدى $7.5 \leq C_1 \leq 22.5$ فإن التغير سيكون فقط في قيمة دالة الهدف التي ستصبح كما يلي:

$$Z = 12 \times 2500 + 15 \times 3750 = 86250$$

3–حساب مدى الإمكانية:

–مدى الإمكانية للكمية التي تمثل الطرف الأيمن للقيد الأول (b_1):

❖ نجد مدى التغير ($b_1 \Delta$) على النحو التالي:

2500	3750	4500	4250	
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\div$
5000	−15000	−9000	17000	

❖ نجد المدى حيث أن الكمية الأصلية للطرف الأيمن في القيد الأول هي 15000 وحدة لذلك فإن المدى:

$$15000-5000=10000$$

$$15000+9000=24000$$

إذن مدى الإمكانية للقيد الأول هو:

$$10000 \leq b_1 \leq 24000$$

وهذا يعني أن مادامت الكمية المتاحة من المورد الأول بين 10000 و24000 لن يتغير سعر ظل المورد الأول، وسيبقى الحل أمثل.

-مدى الإمكانية للكمية التي تمثل الطرف الأيمن للقيد الثاني (b_2):

❖ نجد مدى التغير (Δ b_2) على النحو التالي:

2500	3750	4500	4250	
$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\div$
-5000	5000	9000	5666	

❖ نجد المدى حيث أن الكمية الأصلية للطرف الأيمن في القيد الثاني هي 10000 وحدة لذلك فإن المدى:

$$10000-5000=5000$$

$$10000+5000=15000$$

إذن مدى الإمكانية للقيد الثاني هو:

$$5000 \leq b_2 \leq 15000$$

وهذا يعني أن مادامت الكمية المتاحة من المورد الثاني بين 5000 و15000 لن يتغير سعر ظل المورد الثاني، وسيبقى الحل أمثل.

-مدى الإمكانية للكمية التي تمثل الطرف الأيمن للقيد الثالث (b_3):

❖ نجد مدى التغير ($\Delta\ b_3$) على النحو التالي:

÷	4250	4500	3750	2500
	0	1	0	0
	∞	4500	∞	∞

❖ نجد المدى حيث أن الكمية الأصلية للطرف الأيمن في القيد الثالث هي 7000 وحدة لذلك فإن المدى:

$$7000-4500=2500$$

$$7000+\infty = \infty$$

إذن مدى الإمكانية للقيد الثالث هو:

$$2500 \leq b_3 \leq \infty$$

-مدى الإمكانية للكمية التي تمثل الطرف الأيمن للقيد الرابع (b_4):

❖ نجد مدى التغير ($\Delta\ b_4$) على النحو التالي:

÷	4250	4500	3750	2500
	1	0	0	0
	4250	∞	∞	∞

❖ نجد المدى حيث أن الكمية الأصلية للطرف الأيمن في القيد الرابع هي 8000 وحدة لذلك فإن المدى:

$$8000-4250=3750$$

$$8000+\infty=\infty$$

إذن مدى الإمكانية للقيد الرابع هو:

$$43750 \leq b_4 \leq \infty$$

4–الحل الأمثل الجديد بعد إضافة 1000 ساعة للقيد الأول:

نضرب المصفوفة تحت المتغيرات الراكدة في جدول الحل الأمثل في عمود الموارد الجديد فنحصل على:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16000 \\ 10000 \\ 7000 \\ 8000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3000 \\ 3500 \\ 4000 \\ 4500 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن جميع قيم العمود الناتج موجبة وعليه فإن الحل لا يزال أمثلا، أما قيمة دالة الهدف فهي:

$$Z = 10 \times 3000 + 15 \times 3500 = 82500$$

يمكن الحصول على نفس النتائج وذلك بضرب 1000 في عمود S_1 ونضيف النتيجة إلى الطرف الأيمن في جدول الحل الأمثل.

5– الحل الأمثل الجديد بعد تخفيض الساعات المتاحة للقيد الثاني بـ500:

نستخدم الطريقة الثانية بضرب 500- في عمود S_2 ونضيف النتيجة إلى الطرف الأيمن في جدول الحل الأمثل فنحصل على:

$$X_1 \rightarrow -500 \times -\frac{1}{2} + 2500 = 2750$$
$$X_2 \rightarrow -500 \times \frac{3}{4} + 3750 = 3375$$
$$S_3 \rightarrow -500 \times \frac{1}{2} + 4500 = 4250$$
$$S_4 \rightarrow -500 \times -\frac{3}{4} + 4250 = 4625$$
$$Z \rightarrow -500 \times 6.25 + 81250 = 78125$$

نلاحظ أن جميع قيم العمود الناتج موجبة وعليه فإن الحل لا يزال أمثلا.

التمرين الثاني:

لنفرض أن لدينا مشكلة البرمجة الخطية الآتية:

$$M\,ax\; z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

$$S/C\begin{cases} X_1 + 2X_2 + X_3 \le 430 \\ 3X_1 + 2X_3 \le 460 \\ X_1 + 4X_2 \le 420 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0 \;\;,\;\; x_2 \ge 0,\;\; x_3 \ge 0$$

جدول الحل الأمثل هو:

م/ق	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	b_i
Z	4	0	0	1	2	0	1350
X_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
X_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
S_3	2	0	0	-2	1	1	20

المطلوب:

1- حدد فيما إذا كان الحل سيبقى أمثلا في حالة إضافة قيد جديد هو كالآتي:

$$2X_1 + X_2 + 3X_3 \le 780$$

2- افترض أنه تم إضافة متغير جديد هو X_4 بمعامل 6 في دالة الهدف وبمعاملات في القيود الثلاثة (2،3،2) على التوالي، ما تأثير ذلك على الحل الأمثل؟

الحل:

1- إضافة قيد جديد:

بتعويض قيم x_1 وx_2 في جدول الحل الأمثل في القيد الجديد نجد:

$$2(0)+1(100)+3(230)\leq 780$$
$$790\leq 780$$

القيد لا يحقق الحل الأمثل ومنه نقوم بتحسين الحل:

-الصيغة القياسية للقيد الجديد هي:

$$2X_1+X_2+3X_3+S_4=780$$

-نستخرج قيم x_2 وx_3 ونعوضها في الصيغة القياسية.

لدينا من جدول الحل الأمثل:

$$X_2-\frac{1}{4}X_1+\frac{1}{2}S_1-\frac{1}{4}S_2=100\ \Rightarrow X_2=100+\frac{1}{4}X_1-\frac{1}{2}S_1+\frac{1}{4}S_2$$
$$X_3+\frac{3}{2}X_1+\frac{1}{2}S_2=230\ \Rightarrow X_3=230-\frac{3}{2}X_1-\frac{1}{2}S_2$$

وعليه:

$$2X_1+\left(100+\frac{1}{4}X_1-\frac{1}{2}S_1+\frac{1}{4}S_2\right)+3\left(230-\frac{3}{2}X_1-\frac{1}{2}S_2\right)+S_4=780$$
$$\Rightarrow\ -\frac{9}{4}X_1-\frac{1}{2}S_1-\frac{5}{4}S_2+S_4=-10$$

ومنه يصبح جدول الحل الأمثل كما يلي:

م/ق	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	b_i
Z	4	0	0	1	2	0	0	1350
X_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	100
X_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	230
S_3	2	0	0	-2	1	1	0	20
S_4	$-\frac{9}{4}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{4}$	0	1	-10

يلاحظ من الجدول أن هناك قيمة سالبة تقابل المتغير S_4 لذلك يجب تحسين الحل الأمثل باستخدام طريقة السمبلكس المقابلة.

2- إضافة متغير جديد:

نقوم بحساب قيم عمود X_4 في جدول الحل الأمثل:

$$x_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

نأخذ القيم في سطر دالة الهدف والتي تقع تحت متغيرات الفجوة ونضربها في معاملات المتغير الجديد في القيود فنجد:

$$2 \times 1 + 3 \times 2 + 2 \times 0 = 8$$

وهي قيمة أكبر من قيمة معامل المتغير x_4 في سطر دالة الهدف، هذا يعني أن المتغير الجديد x_4 سوف لن يظهر كمتغير أساسي في جدول الحل الأمثل، وستكون قيمته في سطر دالة الهدف مساوية لـ: 2=6-8، وبذلك يكون جدول الحل الأمثل كما يلي:

م/ق	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	b_i
Z	4	0	0	2	1	2	0	1350
X_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
X_3	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	230
S_3	2	0	0	1	-2	1	1	20

تمارين للحل:

التمرين الأول:

يبين الجدول أدناه الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية الآتي:

$$\text{M ax } z_1 = 40x_1 + 30x_2 + 50X_3$$

$$S/C\begin{cases} 6X_1 + 4X_2 + X_3 \leq 320 \\ 6X_1 + 7X_2 + 3X_3 \leq 160 \\ 4X_1 + 5X_2 + 12X_3 \leq 240 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \ \ , \ \ x_2 \geq 0, \ \ x_3 \geq 0$$

جدول الحل الأمثل هو:

م/ق	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	b_i
Z	0	$\frac{53}{3}$	0	0	$\frac{14}{3}$	3	$\frac{4400}{3}$
S_1	0	$-\frac{44}{15}$	0	1	$-\frac{17}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{560}{3}$
X_1	1	$\frac{23}{20}$	0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{20}$	200
X_3	0	$\frac{1}{30}$	1	0	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{400}{3}$

المطلوب:

1- أوجد المدى الذي تبقى فيه أسعار الظل سارية المفعول (مدى الإمكانية).

2- حدد فيما إذا كان الحل سيبقى أمثلا إذا حصلت زيادة في المورد الأول وأصبح 340 بدلا من 320.

3- أوجد مدى الأمثلية لمعاملات متغيرات القرار في دالة الهدف.

التمرين الثاني:

ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية الآتي:

$$\text{M ax } z_1 = 3x_1 + 2x_2$$

$$S/C \begin{cases} X_1 + 2X_2 \leq 6 \\ 2X_1 + X_2 \leq 1 \\ -X_1 + X_2 \leq 1 \\ X_2 \leq 2 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$$

جدول الحل الأمثل هو:

م/ق	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	b_i
Z	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{38}{3}$
X_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
X_1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$
S_3	0	0	-1	1	1	0	3
S_4	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$

المطلوب:

1- أوجد المدى الذي تبقى فيه أسعار الظل سارية المفعول (مدى الإمكانية).

2- حدد فيما إذا كان الحل سيبقى أمثلا إذا حصلت زيادة في المورد الأول وأصبح 37 بدلا من 6.

3- أوجد مدى الأمثلية لمعاملات متغيرات القرار في دالة الهدف.

4- حدد فيما إذا كان الحل سيبقى أمثلا في حالة إضافة قيد جديد هو كالآتي: $X_1 + X_2 \leq 4$

5- افترض أنه تم إضافة متغير جديد هو X_3 بمعامل $\frac{3}{2}$ في دالة الهدف وبمعاملات في القيود الأربعة ($\frac{3}{4}$، $\frac{3}{4}$، -1 ، 0) على التوالي، ما تأثير ذلك على الحل الأمثل؟

المحور الخامس:

مشــكل النـــقل

المحور الخامس: مشكل النقل

تمهيد:

اتسع استخدام أسس ومفاهيم البرمجة الخطية ليشمل نواحي متعددة في مجال اتخاذ القرارات، ومن أهم الطرق التي تم تطويرها بناءا على هذا الأسلوب طريقة النقل، حيث يلعب النقل دورا هاماً في الاقتصاد القومي، فتوافر النقل الاقتصادي يعتبر من الأمور الجوهرية لضمان بقاء واستمرار مؤسسات الأعمال، ويعتبر النقل أحد العناصر المهمة بل والرئيسية في إيصال السلع إلى المستهلك، وفي نقل المنتجات نصف المصنوعة من مرحلة إنتاجية إلى أخرى في المؤسسات الصناعية، ولقد بدأت مشكلة النقل تأخذ أهميتها من خلال ما تحتله تكاليف النقل من أهمية نسبية مقارنة بمجموع تكاليف التصنيع والتوزيع، من هذا المنطلق تسعى مؤسسات الأعمال المختلفة إلى استخدام الوسائل والأساليب الحديثة والمتطورة بهدف تخفيض تكاليف النقل إلى أدنى مستوى ممكن.

في هذا الفصل سنتعرف على كيفية صياغة مشكلة النقل والتي تعد حالة خاصة من مشاكل البرمجة الخطية، كذلك كيفية إيجاد الحل الأمثل بحيث تكون تكاليف النقل الكلية أقل ما يمكن.

أولا: صياغة نموذج النقل:

يشترط لاستخدام نموذج النقل توافر الشروط التالية[52]:

– وجود طاقات محدودة ومعروفه ومقاسه كميا للمصانع والمخازن التي تنقل منها السلع أو المواد ومقدارها m وكذلك فإن المناطق البيعية أو المخازن كجهات طالبة يجب أن تكون احتياجاتها محددة ومقاسه في شكل كمي ومقدارها n.

– وجود مسارات متعددة لنقل أو شحن السلع أو المواد من مناطق الإنتاج أو مصادر العرض إلى مناطق الاستهلاك أو مواقع الطلب، حتى يمكن الاختيار والمفاضلة بين هذه المسارات البديلة.

– ثبات تكلفة نقل الوحدة من السلعة أو المادة c_{ij} من موقع شحنها i إلى موقع وصولها j، وذلك للحفاظ على صفة الخطية.

[52] – جمال عبد العزيز ناصر، **بحوث العمليات في المحاسبة**، جامعة القاهرة، مصر، 2009، ص ص 4،5.

– الكميات المنقولة من المراكز الإنتاجية إلى المراكز التسويقية محددة وهي x_{ij}.

يشترط نموذج النقل في شكله الأولي ضرورة المساواة بين حجم السلع في مصادر العرض وحجم الطلب على السلع، ولتسهيل دراسة مشكلة النقل يمكن تمثيل جدول التكاليف لنقل الوحدات من مصادر العرض إلى مواقع الطلب كالآتي:

المراكز التسويقية

المصادر

	d_1	d_2	…	d_n	العرض(a_i)
s_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
s_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
s_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
الطلب (b_j)	b_1	b_2	…	b_n	$\sum ai = \sum bj$

من الجدول يمكن صياغة نموذج البرمجة الخطية لمسألة النقل بالصيغة التالية:

$$MIN\ Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij}$$

قيود العرض:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \qquad i = 1,2,\dots,m$$

قيود الطلب:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j \qquad j = 1,2,\dots,n$$

$$x_{ij} \ge 0$$

بما أن الفرضية الأساسية لحل نموذج النقل هي أن مجموع العرض يساوي مجموع الطلب، هذا يعني أن كل الكميات الموجودة في مصادر العرض سوف تنقل لتلبي الطلب على المنتوج، وعلى هذا الأساس فإن نموذج البرمجة الخطية يتحول إلى الصيغة التالية:

$$MIN\ Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

قيود العرض:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1,2, \dots, m$$

قيود الطلب:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1,2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0$$

لإيجاد أقل تكلفة لمشكلة النقل سيكون من الصعب حل هذا النموذج الرياضي لكثرة القيود والمتغيرات، لذا سنتعرض إلى طرق أسهل لحل هذه المشكلة.

ثانيا: طرق حل مشاكل النقل

يقسم حل مشاكل النقل إلى مرحلتين:

أ- مرحلة الحل الأولي (الابتدائي): يمكن حل مشاكل النقل باستخدام إحدى الطرق التالية:

1-طريقة الزاوية الشمالية الغربية: تعتبر هذه الطريقة من أبسط الأساليب الرياضية لحل مشاكل النقل، وهي لا تأخذ بعين الاعتبار تكاليف النقل من المصدر إلى مراكز التسويق، بل تعتمد لبداية الحل على الزاوية الشمالية الغربية من الجدول، وتتجه شرقا نحو الاتجاه الجنوبي لغاية الوصول إلى الزاوية الجنوبية الشرقية[53]، وحسب هذه الطريقة يجب التأكد من أن جدول النقل في حالة توازن (مجموع العرض يساوي مجموع الطلب)، ولتوضيح كيفية استخدامها نورد المثال التالي:

[53] – حسين محمود الجنابي، مرجع سبق ذكره، ص181.

مثال: إحدى الشركات لديها ثلاث مخازن في مواقع مختلفة كما أن لديها ثلاث مراكز تسويقية، تكاليف نقل الوحدة الواحدة من السلع، وحجم السلع في كل مخزن والاحتياجات لكل مركز تسويقي مشار إليها في الجدول أدناه:

من \ إلى	d_1	d_2	d_3	العرض(a_i)
S_1	1	4	5	55
S_2	5	7	3	45
S_3	10	8	9	20
الطلب(b_j)	40	30	50	120

المطلوب:

-ما هو مجموع تكاليف النقل للسلعة من المصادر إلى المراكز باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية؟

الحل:

يتم توزيع الكميات من مختلف المصادر إلى مختلف المراكز كما يلي:

1- نبدأ بأول خلية في الجدول وهي الخلية (S_1,d_1)، ثم نقارن الكمية المطلوبة من قبل مركز الطلب d_1 بالكمية المتوفرة لدى المصدر S_1 ونخصص أقل الكميتين للخلية (S_1,d_1): $\min(40,55)=40$، أي يتم تخصيص 40 وحدة للخلية (S_1,d_1) وهذا يؤدي إلى سد احتياجات المركز d_1 بالكامل، حيث يتم شطب العمود الأول وذلك يشير إلى أن التخصيصات للخلايا الأخرى في العمود ذاته تساوي صفر.

إن عملية النقل بموجب هذه الطريقة تستمر بنفس السطر S_1 حتى يتم إغلاقه ونفاذ جميع الكمية المتاحة في المصدر المقابل للسطر S1، يتم التوزيع من خلال الجدول التالي:

إلى / من	d_1	d_2	d_3	العرض(a_i)	باقي	باقي
S_1	1 40	4 15	5	55	15	0
S_2	5	7 15	3 30	45	30	0
S_3	10	8	9 20	20	0	
الطلب(b_j)	40	30	50	120		
باقي	0	15	20			
باقي		0	0			

2– نأخذ الخلية (S_1,d_2)، ونقارن الكمية المطلوبة من قبل مركز الطلب d_2 بالكمية المتوفرة لدى المصدر S_1 والتي تقدر بـ 15 وحدة (وهي المقدار المتبقي بعد تسويق المصدر S_1 لجزء من معروضه إلى المركز $d1$)، نخصص أقل الكميتين للخلية (S_1,d_2): $\min(15,30)=15$، أي يتم تخصيص 15 وحدة للخلية (S_1,d_2)، نلاحظ أن جميع الكميات المتوفرة لدى المصدر S_1 قد نفذت لذا يتم شطب الخلايا المتبقية من السطر الأول.

3– ننتقل إلى الخلية (S_2,d_2)، ثم نقارن الكمية التي يحتاجها مركز الطلب d_2 (15 وحدة) بالكمية المتوفرة لدى المصدر S_2 ونخصص أقل الكميتين للخلية (S_2, d_2): $\min(15,45)=15$، نخصص 15 وحدة للخلية S_2, (d_2) وهذا يؤدي إلى سد احتياجات المركز d_2 بالكامل، لذا يتم شطب العمود الثاني.

4- نأخذ الخلية (S_2,d_3)، ثم نقارن الكمية التي يحتاجها مركز الطلب d_3 بالكمية المتاحة لدى المصدر S_2 والتي تقدر بـ 30 وحدة (وهي المقدار المتبقي بعد تسويق المصدر S_2 لجزء من معروضه إلى المركز d_2)، نخصص أقل الكميتين للخلية (S_2, d_3): $\min(30,50)=30$، أي يتم تخصيص 30 وحدة للخلية (S_2, d_3)، نلاحظ أن جميع الكميات المتوفرة لدى المصدر S_2 قد نفذت لذا يتم شطب الخلية المتبقية من السطر الثاني.

5- أخيرا نأخذ الخلية (S_3,d_3)، ثم نخصص لها 20 وحدة وهي الكمية المتبقية لدى المصدر S_3 والمطلوبة من قبل المركز d_3، عند هذه المرحلة تكون جميع الكميات المتاحة لدى المصادر قد نفذت وبالتالي نكون قد وصلنا إلى جدول النقل بصيغته النهائية كما يلي:

إلى / من	d_1	d_2	d_3	العرض(a_i)
S_1	1 40	4 15	5	55
S_2	5	7 15	3 30	45
S_3	10	8	9 20	20
الطلب(b_j)	40	30	50	120

نحسب إجمالي التكاليف وهي حاصل ضرب عدد الوحدات المنقولة في تكلفة نقل الوحدة لكل الجدول ومنه:

$$Z=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}C_{ij}X_{ij}=1\times 40+4\times 15+7\times 15+3\times 30+9\times 20=475$$

تجدر الإشارة أن عدد المتغيرات الداخلة في الحل الأساسي هو: m+n-1 حيث يمثل m عدد المصادر (الأسطر) وn عدد المراكز (الأعمدة)، وبالنظر إلى مثالنا فإن عدد المتغيرات الداخلة في الحل يجب أن يساوي 3+3-1=5، وهو بالفعل عدد المتغيرات الداخلة في الحل كما يعرضها الجدول السابق.

2-طريقة التكلفة الصغرى: تعتبر هذه الطريقة أفضل من الطريقة السابقة لأنها تأخذ بعين الاعتبار التكلفة الأقل، وحتى نحصل على الحل الأساسي الأولي الممكن بهذه الطريقة، علينا في البداية أن نتأكد أن جدول النقل في حالة توازن ثم نتبع الخطوات التالية[54]:

1- اختيار الخلية ذات التكلفة الأقل في جدول النقل ونخصص لها الكمية X_{ij} وفقا للعلاقة التالية:

$$X_{ij}=\min(a_i,b_j)$$

[54]-حسن ياسين طعمة وآخرون، مرجع سبق ذكره، ص159.

2- يتم اختيار الخلية الأقل كلفة من بين الخلايا المتبقية وتخصص لها الكمية X_{ij} وفقا للعلاقة السابقة، وهكذا تكرر العملية إلى أن يتم تسويق جميع الكميات المعروضة وبذلك يتم التوصل إلى الحل الأولي.

مثال:

أوجد الحل الأولي لمشكلة النقل السابقة باستخدام طريقة التكلفة الصغرى.

الحل:

1- نلاحظ أن أقل تكلفة في الجدول هي 1 في الخلية (S_1,d_1)، لذا نقارن الكمية المطلوبة من قبل مركز الطلب d_1 بالكمية المتوفرة لدى المصدر S_1 ونخصص أقل الكميتين للخلية (S_1,d_1): $\min(40,55)=40$، أي أن المصدر S_1 قد لبى كل احتياجات المركز d_1 (نشطب الخليتين المتبقيتين)، ويبقى له عرض مقداره 15 وحدة مثلما يوضحه الجدول التالي:

من \ إلى	d_1	d_2	d_3	العرض (a_i)	باقي	باقي
S_1	1 40	4 15	5	55	15	0
S_2	5	7	3 45	45	0	
S_3	10	8 15	9 5	20	5	0
الطلب (b_j)	40	30	50	120		
باقي	0	15	5			
باقي		0	0			

2-نبحث عن أقل تكلفة ضمن القيم المتبقية في الجدول، فنجدها تساوي 3 وهي تقع في الخلية (S_2,d_3)، نقارن الكمية التي يحتاجها مركز الطلب d_3 بالكمية المتاحة لدى المصدر S_2 ثم نختار أقل الكميتين $\min(45,50)=45$ ونخصصها للخلية (S_2,d_3)، نلاحظ أن جميع الكميات المتوفرة لدى المصدر S_2 قد نفذت (نشطب الخليتين المتبقيتين)، ويتبقى للمركز d_3 قيمة 5 وحدات لتلبية كل احتياجاته.

3- أقل تكلفة ضمن القيم المتبقية في الجدول تساوي 4 وهي تقع في الخلية (S_1,d_2)، نقارن الكمية التي يحتاجها مركز الطلب d_2 بالكمية المتاحة لدى المصدر S_1 ثم نختار أقل الكميتين $\min(15,30)=15$ ونخصصها للخلية (S_1,d_2)، وبذلك تكون جميع الكميات المتوفرة لدى المصدر S_1 قد نفذت (نشطب الخلية المتبقية)، ويتبقى للمركز d_2 قيمة 15 وحدة لم تلبى بعد.

4- التكلفة الأقل التالية تساوي 8 وتقع في الخلية (S_3,d_2)، لذا نقارن ما هو متوفر لدى المصدر S_3 مع احتياجات مركز الطلب d_2، ونخصص أقل الكميتين $\min(15,20)=15$ للخلية (S_3,d_2)، أي أن المصدر S_3 قد لبى كل احتياجات المركز d_2 ويبقى له عرض مقداره 5 وحدات.

5- التكلفة الأخيرة ضمن الجدول تساوي 5 وتقع في الخلية (S_3,d_3)، نلاحظ أن الكمية المتبقية لدى المصدر S_3 هي نفسها المتبقية لدى المركز d_3 لذا نخصص 5 وحدات للخلية (S_3,d_3).

ويتم بذلك تصريف كل الكميات المعروضة وتلبية كل الاحتياجات المطلوبة، كما أن عدد المتغيرات الداخلة في الحل يساوي m+n-1، وبالتالي نكون قد وصلنا إلى جدول النقل بصيغته النهائية كما يلي:

إلى / من	d_1	d_2	d_3	العرض(a_i)
S_1	1 / 40	4 / 15	5	55
S_2	5	7	3 / 45	45
S_3	10	8 / 15	9 / 5	20
الطلب(b_j)	40	30	50	120

نحسب إجمالي التكاليف كما يلي:

$$Z = 1 \times 40 + 4 \times 15 + 3 \times 45 + 8 \times 15 + 9 \times 5 = 400$$

نلاحظ أن التكلفة الإجمالية باستخدام طريقة التكلفة الصغرى قد انخفض بمقدار 75 وحدة نقدية مقارنة مع التكلفة الإجمالية باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

3-طريقة فوجل التقريبية: وتسمى أيضا بطريقة الجزاء، وتعتبر من أهم الطرق الثلاثة على الإطلاق لما تتميز به من قدرة للوصول إلى الحل القريب من الحل الأمثل، ونادرا ما تكون طريقتي التكلفة الصغرى وطريقة الزاوية الشمالية الغربية أفضل من طريقة فوجل، لكن طريقة فوجل تحتاج إلى عمليات حسابية أطول مما تحتاجه الطريقتين السابقتين، وتتلخص خطوات أيجاد الحل الأساسي الأولي بهذه الطريقة فيما يلي[55]:

-حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل سطر وفي كل عمود، تسمى هذه الفروقات بأرقام فوجل حيث يتم وضعها على جانبي الجدول.

- تحديد السطر أو العمود الذي يقابله أكبر فرق (أكبر رقم من أرقام فوجل).

- اختيار الخلية ذات التكلفة الأقل في السطر أو العمود الذي يقابله أكبر فرق، نقارن احتياجات المركز مع ما هو متوفر في المصدر لنأخذ القيمة الأقل.

- نعيد الخطوات السابقة إلى أن نلبي احتياجات جميع مراكز الطلب من المصادر المتاحة، مع مراعاة استبعاد الخلايا التي تشغل أو التي يتم شطبها.

ملاحظة:

في حالة وجود قيمتين عظيمتين من أرقام فوجل فإننا نقارن بين التكلفتين الدنيويتين، ونختار أقل تكلفة مقابلة ونشبع الخلية التي تنتمي إليها، وفي حالة ما إذا كانت هاتين التكلفتين أيضا متساويتين نختار إحداهما لا على التعيين[56]، أما إذا كانت من البداية كل أرقام فوجل متساوية في الأسطر والأعمدة في كل المراحل تفشل طريقة فوجل ونأخذ طريقة التكلفة الصغرى.

مثال:

أوجد الحل الأولي لمشكلة النقل السابقة باستخدام طريقة فوجل.

الحل:

1- نجد الفروقات الأولى في التكلفة للأسطر والأعمدة كما هو مبين في الجدول التالي:

55 -صالح مهدي محسن العامري وعواطف إبراهيم الحداد، **تطبيقات بحوث العمليات في الإدارة**، إثراء للنشر والتوزيع، الأردن، 2009، ص219.

56 - راتول محمد، مرجع سبق ذكره، ص129.

إلى / من	d_1	d_2	d_3	العرض(a_i)	الفرق1	الفرق 2	الفرق 3	الفرق 4
S_1	$\boxed{1}$ 40	$\boxed{4}$ 15	$\boxed{5}$	55	3	1	1	/
S_2	$\boxed{5}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$ 45	45	2	4	1	/
S_3	$\boxed{10}$	$\boxed{8}$ 15	$\boxed{9}$ 5	20	1	1	/	1
الطلب(b_j)	40	30	50	120				
الفرق 1	4	3	2					
الفرق 2	/	3	2					
الفرق 3	/	4	4					

2- نلاحظ أن أكبر فرق سطريا وعموديا هو موجود في العمود الأول، وعليه نبحث على أقل تكلفة في العمود (d_1)، فنجد أن للخلية (S_1,d_1) أقل تكلفة وقيمتها هي 1، نقارن احتياجات مركز الطلب (d_1) مع الكمية المتاحة في المصدر (S_1) ثم نختار أقل الكميتين $\min(40,55)=40$، هذه العملية تؤدي إلى تلبية كل احتياجات المركز d_1 (تشطب الخليتين المتبقيتين من الجدول) بينما تبقى قيمة عرض مقدارها 15 في المصدر S_1، ثم نعيد حساب الفروق الثانية بين التكاليف مرة أخرى مع تجاهل تكاليف الخلايا المملوءة والمشطبة.

3- نلاحظ أن أكبر فرق يقابل السطر الثاني، وأصغر تكلفة على مستوى هذا السطر هي 3 في الخلية (S_2,d_3) نقارن احتياجات مركز الطلب(d_3) مع ما هو متاح من الكميات لدى المصدر (S_2)، ثم نختار أقل الكميتين $\min(50,45)=45$، يتم تخصيص 45 للخلية (S_2,d_3)، وبالتالي جميع الكميات المتوفرة لدى المصدر (S_2) قد نفذت (يتم شطب الخليتين المتبقيتين) وبقي احتياج مقداره 5 وحدات للمركز (d_3) لم يلبى بعد، ثم نعيد حساب الفروق الثالثة بين التكاليف مرة أخرى.

4- نلاحظ أن أكبر فرق هو 4 على مستوى العمودين الثاني والثالث، إلا أننا نختار العمود الثاني لأنه يقابل أقل تكلفة وتقدر قيمتها بـ 4 في الخلية (S_1,d_2) نقارن احتياجات مركز الطلب (d_2) مع ما هو متبقي من الكميات

لدى المصدر (S_1)، ثم نختار أقل الكميتين min(15,30)=45، ونخصصها للخلية (S_1,d_2)، وبالتالي جميع الكميات المتوفرة لدى المصدر (S_1) قد نفذت (يتم شطب الخلية المتبقية) وبقي طلب مقداره 15 وحدة في العمود الثاني (d_3) لم يلبى بعد.

5- عند هذه المرحلة من الحل لا نحتاج لحساب الفرق في التكلفة للأسطر والأعمدة بسبب وجود مصدر عرض واحد وهو S_3 والذي لم تنفذ كل الكميات المتوفرة لديه، إذن نبحث عن أقل تكلفة في السطر S_3 والتي تساوي 8 وتقابل العمود d_2، إذن سيتم تخصيص 15 وحدة لتلبية كل احتياجات مركز الطلب d_2، ويبقى عرض مقداره 5 وحدات يخصص للخلية (S_3,d_3)، ويتم بذلك تلبية كل احتياجات المركز d_3، وبهذا يصبح نموذج النقل في صيغته النهائية كما يلي:

من \ إلى	d_1	d_2	d_3	العرض(a_i)
S_1	1 / 40	4 / 15	5	55
S_2	5	7	3 / 45	45
S_3	10	8 / 15	9 / 5	20
الطلب(b_j)	40	30	50	120

عدد الخلايا الداخلة في الحل يساوي إلى m+n-1 وهو 5، وبموجب الجدول أعلاه تكون تكلفة النقل الإجمالية كما يلي:

$$Z = 1 \times 40 + 4 \times 15 + 3 \times 45 + 8 \times 15 + 9 \times 5 = 400$$

نلاحظ أن الطريقتين الأخيرتين قد حققتا اقتصادا في مجموع التكاليف قدره 75 وحدة نقدية مقارنة بطريقة الزاوية الشمالية الغربية.

ب- مرحلة الحل الأمثل:

يمكن الوصول إلى الحل الأمثل عن طريق إجراء تحسين للحل الأساسي بعدة طرق أهمها:

1- طريقة المسار المغلق (الحجر المتنقل):

تقوم هذه الطريقة على أساس تقييم جميع الخلايا الداخلة الفارغة (المتغيرات غير الأساسية)، لمعرفة مدى مساهمتها في تخفيض تكاليف النقل الكلية في حالة تحويلها إلى خلايا ممتلئة (متغيرات أساسية)، ومن أجل اختيار المتغير الداخل يتم اختبار الخلايا الفارغة في جدول الحل الأولي للنقل الذي تم التوصل إليه بإحدى طرق المرحلة الأولى، تتم عملية الاختبار باستخدام الخطوات التالية[57]:

1- يتم رسم مسار مغلق يبدأ بالخلايا الفارغة ويمر على عدد من الخلايا الممتلئة بخطوط أفقية أو عمودية، على أن لا يزيد عدد الخلايا الممتلئة في كل اتجاه أفقي أو عمودي على خليتين.

2- يبدأ المسار المغلق بإشارة + للخلية الفارغة تعقبها إشارات -،+،- بالتعاقب للخلايا الممتلئة، بحيث تقع الخلايا الممتلئة عند الزوايا القائمة للمسار المغلق الذي ينتهي عند الخلية الفارغة المراد تقييمها، الخلايا الممتلئة الأخرى التي لا تمثل زوايا في المسار فإن قيمتها تبقى كما هي بدون تغيير.

3- نقوم بحساب التكلفة الحدية للخلايا الفارغة عند زوايا الشكل الناتج، حيث تمثل التكلفة الحدية حاصل الفرق بين مجموع تكاليف الخلايا ذات الإشارة الموجبة مطروحا منها جميع التكاليف للخلايا ذات الإشارة السالبة في المسار الواحد (نجمع تكاليف جميع الخلايا الواقعة على زوايا المسار بعد وضع الإشارات عليها)، مع ملاحظة أنه إذا كانت التكلفة الحدية لخلية ما بالسالب فإن ذلك يعني أن شغل تلك الخلية سيؤدي إلى خفض تكاليف النقل.

4- تكرار الخطوات السابقة على جميع الخلايا الفارغة.

5- التحقق من أمثلية الحل كما يلي[58]:

- إذا كانت التكاليف الحدية لكل الخلايا الفارغة موجبة أو صفرية فإن الحل يكون أمثلا.
- إذا كانت هناك تكاليف حدية سالبة فهذا يعني أن إمكانية تحسين الحل المتمثل في تخفيض التكاليف وارد شريطة اختيار أكبر قيمة سالبة، لأنها تساهم بشكل أكبر في تحسين الحل.

57- أكرم محمد عرفان المهتدي، مرجع سبق ذكره، ص ص 139-140.

58- إبراهيم نائب، إنعام باقية، مرجع سبق ذكره، ص 161.

- بعد تحديد المسار ذو أكبر تكلفة حدية سالبة، نختار من قيم الخلايا الممتلئة في المسار المختار القيمة الأكثر سلبية (أي أصغر كمية مؤشر عليها بإشارة –)، نضيف الكمية إلى الخلايا ذات الإشارة الموجبة ونطرحها من الخلايا ذات الإشارة السالبة.
- نحسب التكلفة الحدية المقابلة لهذا التغيير ونعود لاختبار أمثلية الحل من جديد.

لتوضيح هذه الطريقة نقوم بتحسين الحل الأولي الأساسي الممكن الذي تم الوصول إليه باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية، حيث أن الحل الأولي مبين في الجدول التالي:

من \ إلى	d_1	d_2	d_3	العرض (a_i)
S_1	1 40	4 15	5	55
S_2	5	7 15	3 30	45
S_3	10	8	9 20	20
الطلب (b_j)	40	30	50	120

يتضح من خلال الجدول وجود أربعة خلايا فارغة هي:

$$(S_1,d_3)\ ,\ (S_2,d_1)\ ,\ (S_3,d_1)\ ,\ (S_3,d_2).$$

1- نقوم باختبار أمثلية الحل عن طريق رسم مسار مغلق لكل خلية فارغة، ثم نحسب تكاليفها الحدية.

- **المسار المغلق للخلية** (S_1,d_3) هو:

$$(S_1,d_3) \rightarrow (S_2,d_3) \rightarrow (S_2,d_2) \rightarrow (S_1,d_2) \rightarrow (S_1,d_3)$$

نرسم المسار في الجدول كما يلي:

من \ إلى	d_1	d_2	d_3	العرض(a_i)
S_1	(1) 40	(4) 15	(5)	55
S_2	(5)	(7) 15	(3) 30	45
S_3	(10)	(8)	(9) 20	20
الطلب(b_j)	40	30	50	120

نحسب التكلفة الحدية كما يلي:

$$\sigma_{13} = 5 - 3 + 7 - 4 = 5$$

هذا يعني أن الخلية (S_1,d_3) لو تدخل في الحل الأساسي فإن كل وحدة منقولة من المصدر 1 إلى المركز 3 سترفع التكلفة الكلية بـ 5 وحدات نقدية.

– **المسار المغلق للخلية** (S_2,d_1) هو:

$$(S_2,d_1) \rightarrow (S_1,d_1) \rightarrow (S_1,d_2) \rightarrow (S_2,d_2) \rightarrow (S_2,d_1)$$

نرسم المسار في الجدول كما يلي:

من \ إلى	d_1	d_2	d_3	العرض(a_i)
S_1	(1) 40	(4) 15	(5)	55
S_2	(5)	(7) 15	(3) 30	45
S_3	(10)	(8)	(9) 20	20
الطلب(b_j)	40	30	50	120

نحسب التكلفة الحدية كما يلي:

$$\sigma_{21} = 5 - 1 + 4 - 7 = 1$$

إذن كل وحدة منقولة من المصدر 1 إلى المركز 3 سترفع التكلفة الكلية بوحدة واحدة.

– **المسار المغلق للخلية** (S_3,d_1) هو:

$$(S_3,d_1) \rightarrow (S_1,d_1) \rightarrow (S_1,d_2) \rightarrow (S_2,d_2) \rightarrow (S_2,d_3) \rightarrow (S_3,d_3) \rightarrow (S_3,d_1)$$

نرسم المسار في الجدول كما يلي:

إلى / من	d_1	d_2	d_3	العرض (a_i)
S_1	1 40 -	4 15 +	5	55
S_2	5	7 15 -	3 30 +	45
S_3	10 +	8	9 20 -	20
الطلب (b_j)	40	30	50	120

نحسب التكلفة الحدية كما يلي:

$$\sigma_{31} = 10 - 1 + 4 - 7 + 3 - 9 = 0$$

هذا يعني أن إدخال هذه الخلية إلى الحل الأساسي لن يؤثر على التكلفة الكلية.

– **المسار المغلق للخلية** (S_3,d_2) هو:

$$(S_3,d_2) \rightarrow (S_2,d_2) \rightarrow (S_2,d_3) \rightarrow (S_3,d_3) \rightarrow (S_3,d_2)$$

نرسم المسار في الجدول كما يلي:

إلى / من	d_1	d_2	d_3	العرض (a_i)
S_1	[1] 40	[4] 15	[5]	55
S_2	[5]	[7] 15 (-)	[3] 30 (+)	45
S_3	[10]	[8] (+)	[9] 20 (-)	20
الطلب (b_j)	40	30	50	120

نحسب التكلفة الحدية كما يلي:

$$\sigma_{32} = 8 - 7 + 3 - 9 = -5$$

هذا يعني أن كل وحدة منقولة من المصدر 3 إلى المركز 2 ستخفض التكلفة الكلية بـ 5 وحدات نقدية.

انطلاقا من التكاليف الحدية المحسوبة سابقا نجد أن الخلية (S_3, d_2) هي التي تعطي تخفيضا للتكلفة لذلك فإن الحل الأساسي الأولي باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية غير أمثل، إذن الخلية المرشحة للدخول إلى الأساس هي المقابلة لأكبر تكلفة حدية سالبة وهي الخلية (S_3, d_2)(في حال تساوي أعلى تكلفة حدية بإشارة سالبة لخليتين فارغتين نختار إحداهما عشوائيا).

نقوم بإجراء تغييرات على طول المسار المغلق للخلية (S_3, d_2) وذلك بإضافة وطرح أصغر قيمة متواجدة على الزوايا التي تحمل الإشارة (−)، وهذا لتجنب إحداث قيم سالبة لبعض المتغيرات، حسب المثال لدينا القيم المتواجدة في الزوايا السالبة هي: $x_{33}=20$، $x_{22}=15$، لذلك المتغيرة x_{22} هي التي ستخرج من الأساس وتتحول إلى قيمة معدومة بإحداث التعديل أدناه:

المسار المغلق للخلية (S_3, d_2)	$(S_3, d_3)\rightarrow$	(S_2, d_3) $\rightarrow$	(S_2, d_2) $\rightarrow$	(S_3, d_2)
قيم الخلايا الممتلئة	20−	30+	15−	+
قيم الخلايا بعد التعديل	20−15=5	30+15=45	15−15=0	15+

Min(15,20)= 15

ويكون جدول النقل الثاني بعد إجراء التعديل السابق كما يلي:

من \ إلى	d_1	d_2	d_3	العرض(a_i)
S_1	1 40	4 15	5	55
S_2	5	7	3 45	45
S_3	10	8 15	9 5	20
الطلب(b_j)	40	30	50	120

بما أن التكلفة الحدية للخلية (S_3,d_2) هي $\sigma_{32} = -5$ لذلك فإن التكلفة الإجمالية ستنخفض بمقدار $\sigma_{32} \times 15$ ، أي بمقدار 75 وحدة نقدية، أي التكلفة الإجمالية تساوي 400 وحدة نقدية ويمكن التأكد من ذلك كما يلي:

$$Z = 1 \times 40 + 4 \times 15 + 3 \times 45 + 8 \times 15 + 9 \times 5 = 400$$

نقوم باختبار أمثلية الحل مرة أخرى عن طريق رسم مسار مغلق لكل خلية فارغة، ثم نحسب تكاليفها الحدية كما يلي:

$$(S_1,d_3) \rightarrow (S_3,d_3) \rightarrow (S_3,d_2) \rightarrow (S_1,d_2) \rightarrow (S_1,d_3)$$

$$\sigma_{13} = 5 - 9 + 8 - 4 = 0$$

$$(S_2,d_1) \rightarrow (S_1,d_1) \rightarrow (S_1,d_2) \rightarrow (S_3,d_2) \rightarrow (S_3,d_3) \rightarrow (S_2,d_3) \rightarrow (S_2,d_1)$$

$$\sigma_{21} = 5 - 1 + 4 - 8 + 9 - 3 = 6$$

$$(S_2,d_2) \rightarrow (S_2,d_3) \rightarrow (S_3,d_3) \rightarrow (S_3,d_2) \rightarrow (S_2,d_2)$$

$$\sigma_{22} = 7 - 3 + 9 - 8 = 5$$

$$(S_3,d_1) \rightarrow (S_1,d_1) \rightarrow (S_1,d_2) \rightarrow (S_3,d_2) \rightarrow (S_3,d_1)$$

$$\sigma_{31} = 10 - 1 + 4 - 8 = 5$$

بما أن كل التكاليف الحدية موجبة إذن الحل أمثل.

2- طريقة التوزيع المعدلة:

إن هدف هذه الطريقة لا يختلف عن هدف طريقة المسار المغلق والمتمثل في تقييم الفعالية الاقتصادية للمسارات غير المستخدمة لإظهار تأثيرها في حالة استخدامها أملا في تحقيق الحل الأمثل، إلا أن ما يميز هذه الطريقة عن السابقة هو عدم الحاجة إلى رسم جميع المسارات المغلقة، مما ينتج عنه اختصارا في الوقت والجهد ويتم إتباع الخطوات التالية لاستخدام هذه الطريقة[59]:

1- لكل سطر (i) في جدول النقل يتم وضع مقابل له هو (u_i) ولكل عمود (j) يوضع له مقابل (v_j).

2- يتم تجزئة الخلايا الواردة في جدول النقل عند الحل الأولي الأساسي إلى خلايا ممتلئة (متغيرات أساسية) وخلايا فارغة (متغيرات غير أساسية).

3- لجميع الخلايا الممتلئة يتم وضع العلاقة الرياضية:

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

4- يتم حساب التكلفة الحدية لكل خلية فارغة وذلك وفقا للعلاقة:

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

5- يكون الحل أمثلا إذا كانت التكاليف الحدية لكل الخلايا الفارغة موجبة أو صفرية، أما إذا كانت هناك تكاليف حدية سالبة نختار الخلية التي تقابلها أكبر قيمة سالبة، ثم نرسم مسارها المغلق ونجري عملية النقل حسب ما تم التطرق إليه سابقا في طريقة المسار المغلق، الفرق هنا يكمن في أن رسم المسار المغلق يكون فقط للخلية التي سوف تدخل إلى الحل وليس لجميع الخلايا الفارغة.

لتوضيح هذه الطريقة نطبق الخطوات السابقة على جدول الحل الأولي الأساسي الممكن الذي تم الوصول إليه باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية، حيث أن الحل الأولي مبين في الجدول التالي:

[59]- جهاد صياح بني هاني، مرجع سبق ذكره، ص 170.

		V_1	V_2	V_3	
	إلى / من	d_1	d_2	d_3	العرض(a_i)
U_1	S_1	$\boxed{1}$ 40	$\boxed{4}$ 15	$\boxed{5}$	55
U_2	S_2	$\boxed{5}$	$\boxed{7}$ 15	$\boxed{3}$ 30	45
U_3	S_3	$\boxed{10}$	$\boxed{8}$	$\boxed{9}$ 20	20
	الطلب(b_j)	40	30	50	120

1- لكل سطر في الجدول أعلاه نضع له مقابل هو (u_i) ولكل عمود نضع له مقابل (v_j).

2- لجميع الخلايا الممتلئة يتم تطبيق العلاقة الرياضية $u_i + v_j = c_{ij}$، فنحصل على خمس معادلات بها ست مجاهيل لذلك لا يمكن حلها، وعليه نفرض بأن قيمة u_1 تساوي صفر فنحصل على ما يلي:

$$(S_1,d_1) \to u_1 + v_1 = 1 \Rightarrow v_1 = 1$$
$$(S_1,d_2) \to u_1 + v_2 = 4 \Rightarrow v_2 = 4$$
$$(S_2,d_2) \to u_2 + v_2 = 7 \Rightarrow u_2 + 4 = 7 \Rightarrow u_2 = 3$$
$$(S_2,d_3) \to u_2 + v_3 = 3 \Rightarrow 3 + v_3 = 3 \Rightarrow v_3 = 0$$
$$(S_3,d_3) \to u_3 + v_3 = 9 \Rightarrow u_3 + 0 = 9 \Rightarrow u_3 = 9$$

3- نقوم بحساب التكلفة الحدية لكل خلية فارغة وذلك وفقا للعلاقة $\sigma_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ ، فنحصل على:

$$(S_1,d_3) \to \sigma_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 5 - 0 - 0 = 5$$
$$(S_2,d_1) \to \sigma_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 5 - 3 - 1 = 1$$
$$(S_3,d_1) \to \sigma_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 10 - 9 - 1 = 0$$
$$(S_3,d_2) \to \sigma_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 8 - 9 - 4 = -5$$

يتضح مما تقدم أن التكلفة الحدية للخلية (S_3,d_2) سالبة، هذا يعني أن هذه الخلية تساهم في تخفيض التكلفة الإجمالية للنقل لذلك يتم إدخالها للحل، وتنظيم مسارها المغلق كما يلي:

من \ إلى	d_1	d_2	d_3	العرض(a_i)
S_1	1 40	4 15	5	55
S_2	5	7 15 (-)	3 30 (+)	45
S_3	10	8 (+)	9 20 (-)	20
الطلب(b_j)	40	30	50	120

بعد تنفيذ التعديلات على قيم المسار وذلك بإضافة وطرح أصغر قيمة متواجدة على الزوايا التي تحمل الإشارة (-) وهي القيمة 15، نحصل على القيم الجديدة للكميات كما هو مبين في الجدول التالي:

من \ إلى	d_1	d_2	d_3	العرض(a_i)
S_1	1 40	4 15	5	55
S_2	5	7	3 45	45
S_3	10	8 15	9 5	20
الطلب(b_j)	40	30	50	120

من أجل التحقق أن الحل أمثل يتم إعادة الحل مرة أخرى بإيجاد قيم كل من u_i و v_j بافتراض أن قيمة u_1 تساوي صفر باستخدام الخلايا الممتلئة، وإيجاد التكلفة الحدية لكل خلية فارغة على النحو التالي:

الخلايا الممتلئة:

$$(S_1,d_1) \rightarrow u_1 + v_1 = 1 \Rightarrow v_1 = 1$$

$$(S_1,d_2) \rightarrow u_1 + v_2 = 4 \Rightarrow v_2 = 4$$

$$(S_3,d_2) \rightarrow u_3 + v_2 = 8 \Rightarrow u_3 + 4 = 8 \Rightarrow u_3 = 4$$

$$(S_3,d_3) \rightarrow u_3 + v_3 = 9 \Rightarrow 4 + v_3 = 9 \Rightarrow v_3 = 5$$

$$(S_2,d_3) \rightarrow u_2 + v_3 = 3 \Rightarrow u_2 + 5 = 3 \Rightarrow u_2 = -2$$

التكلفة الحدية للخلايا الفارغة:

$$(S_1,d_3) \rightarrow \sigma_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 5 - 0 - 0 = 5$$

$$(S_2,d_1) \rightarrow \sigma_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 5 - (-2) - 1 = 6$$

$$(S_2,d_2) \rightarrow \sigma_{22} = c_{22} - u_2 - v_2 = 7 - (-2) - 4 = 5$$

$$(S_3,d_1) \rightarrow \sigma_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 10 - 4 - 1 = 5$$

بما أن كل التكاليف الحدية موجبة إذن الحل الذي تم التوصل إليه في الجدول الأخير هو الحل الأمثل، وبذلك تكون أقل تكلفة لنقل السلع من المصادر الثلاث إلى المراكز الثلاث هي:

$$Z = 1 \times 40 + 4 \times 15 + 3 \times 45 + 8 \times 15 + 9 \times 5 = 400$$

وهو نفس الحل الذي تم التوصل إليه عند تطبيق طريقة المسار المغلق.

ثالثا: الحالات الخاصة في مشكلة النقل

قد تواجهنا أثناء حل مشكلات النقل المختلفة بعض الحالات التي تتطلب معالجة خاصة، بهدف التمكن من صياغة المشكلة وفقا لمتطلبات نموذجها الرياضي، وفيما يلي الحالات الخاصة في النقل:

أ- عدم تساوي العرض مع الطلب: إن إيجاد الحل الأساسي الأولي والحل الأمثل يتطلب شرطا أساسيا وهو تساوي العرض مع الطلب أي:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

غير أنه عمليا يصعب تحقق هذا الشرط، إذ يكون إما العرض أكبر من الطلب أو العكس، وفي هذه الحالة ينبغي العمل على توفير هذا الشرط تحايلا كما يلي[60]:

[60] -محمد راتول، مرجع سبق ذكره، ص 135.

1– حالة العرض أقل من الطلب:ينبغي إضافة مصدر (سطر) خيالي (وهمي) إلى جدول المسألة، حيث نفترض أن الكمية التي يعرضها هي قيمة الفرق بين الطلب والعرض، وتكاليف النقل من هذا المصدر إلى جميع المراكز نفترضها معدومة.

2– حالة العرض أكبر من الطلب:ينبغي إضافة مركز (عمود) خيالي إلى جدول المسألة، حيث نفترض أن الكمية التي يطلبها هي قيمة الفرق بين العرض والطلب، وتكاليف النقل من أي مصدر إلى هذا المركز نفترضها معدومة.

ملاحظة:

في الحالتين نقوم بإيجاد الحل الأساسي الأولي ثم الحل الأمثل بصفة عادية.

مثال1:مؤسسة لديها مصنعين للإنتاج تمون 3 مخازن في جهات مختلفة، كميات العرض وطاقات استقبال كل مخزن وتكاليف نقل الوحدة الواحدة من كل مصنع إلى كل مخزن مبينة في الجدول التالي:

من \ إلى	d_1	d_2	d_3	العرض(a_i)
S_1	4	8	12	400
S_2	16	4	20	520
الطلب(b_j)	320	280	240	

المطلوب:

1–إيجاد الحل الأولي باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

2–إيجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة المسار المغلق.

الحل:

نلاحظ من خلال جدول النقل بأن العرض (920) أكبر من الطلب (840) أي أن:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \;\; > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

لذلك نستكمل الجدول بإضافة مركز طلب وهمي رابع d_4 الكمية المطلوبة له تساوي الفرق بين العرض والطلب أي 80=840-920، ونعتبر أن تكاليف نقل الوحدة الواحدة من المصدرين S_1 و S_2 إلى المركز d_4 تساوي صفر، وبذلك يكون الطلب مساويا للعرض مثلما يوضحه الجدول التالي:

إلى / من	d_1	d_2	d_3	d_4	العرض(a_i)
S_1	$\boxed{4}$	$\boxed{8}$	$\boxed{12}$	$\boxed{0}$	400
S_2	$\boxed{16}$	$\boxed{4}$	$\boxed{20}$	$\boxed{0}$	520
الطلب(b_j)	320	280	240	80	920

الحل الأولي باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية يكون كما يلي:

إلى / من	d_1	d_2	d_3	d_3	العرض(a_i)
S_1	$\boxed{4}$ 320	$\boxed{8}$ 80	$\boxed{12}$	$\boxed{0}$	400
S_2	$\boxed{16}$	$\boxed{4}$ 200	$\boxed{20}$ 240	$\boxed{0}$ 80	520
الطلب(b_j)	320	280	240	80	920

التكلفة الإجمالية هي:

$$Z = 4 \times 320 + 8 \times 80 + 4 \times 200 + 20 \times 240 + 0 \times 80 = 7520$$

نلاحظ أن الشرط m+n−1 محقق لذلك يمكن إيجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة المسار المغلق:

يتضح من خلال الجدول وجود ثلاث خلايا فارغة هي:

(S_1,d_3) , (S_1,d_4) , (S_2,d_1) .

– نقوم باختبار أمثلية الحل عن طريق رسم مسار مغلق لكل خلية فارغة، ثم نحسب تكاليفها الحدية كما يلي:

الخلية (S_1,d_3) تدخل إلى الحل← $\sigma_{13} = 12 - 20 + 4 - 8 = -12$

$$\sigma_{14} = 0 - 0 + 4 - 8 = -4$$
$$\sigma_{21} = 16 - 4 + 8 - 4 = 16$$

ويكون جدول النقل الثاني بعد إجراء التعديل المناسب كما يلي:

إلى / من	d_1	d_2	d_3	d_4	العرض(a_i)
S_1	4 / 320	8	12 / 80	0	400
S_2	16	4 / 280	20 / 160	0 / 80	520
الطلب(b_j)	320	280	240	80	920

نقوم باختبار أمثلية الحل مرة أخرى عن طريق رسم مسار مغلق لكل خلية فارغة، ثم نحسب تكاليفها الحدية على النحو الآتي:

$$\sigma_{12} = 8 - 12 + 20 - 4 = 12$$
$$\sigma_{14} = 0 - 0 + 20 - 12 = 8$$
$$\sigma_{21} = 16 - 4 + 12 - 20 = 4$$

بما أن كل التكاليف الحدية موجبة إذن الحل الذي تم التوصل إليه هو الحل الأمثل، وقيمة التكلفة الإجمالية للنقل هي:

$$Z = 4 \times 320 + 12 \times 80 + 4 \times 280 + 20 \times 160 + 0 \times 80 = 6560$$

مثال2: افترض أن الكميات في جدول النقل في المثال السابق تغيرت وأصبحت كما يوضحه الجدول التالي:

من \ إلى	d_1	d_2	d_3	العرض(a_i)
S_1	4	8	12	400
S_2	16	4	20	520
الطلب(b_j)	320	360	400	

المطلوب:

1-إيجاد الحل الأولي باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

2-إيجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة المسار المغلق.

الحل:

نلاحظ من خلال جدول النقل بأن العرض (920) أقل من الطلب (1080) أي أن:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

لذلك نستكمل الجدول بإضافة مصدر إنتاج وهمي S_3 الكمية المعروضة فيه تساوي الفرق بين الطلب والعرض أي 160=920-1080، ونعتبر أن تكاليف نقل الوحدة الواحدة من المصدر S_3 إلى المراكز الثلاث تساوي صفر، وبذلك يكون الطلب مساويا للعرض مثلما يوضحه الجدول التالي:

إلى / من	d_1	d_2	d_3	العرض(a_i)
S_1	4	8	12	400
S_2	16	4	20	520
S_3	0	0	0	160
الطلب(b_j)	320	360	400	1080

الحل الأولي باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية يكون كما يلي:

إلى / من	d_1	d_2	d_3	العرض(a_i)
S_1	4 320	8 80	12	400
S_2	16	4 280	20 240	520
S_3	0	0	0 160	160
الطلب(b_j)	320	360	400	1080

التكلفة الإجمالية هي:

$$Z = 4 \times 320 + 8 \times 80 + 4 \times 280 + 20 \times 240 + 0 \times 160 = 7840$$

نلاحظ أن الشرط m+n−1 محقق لذلك يمكن إيجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة المسار المغلق:

يوجد أربع خلايا فارغة هي:

(S_1,d_3) , (S_2,d_1) , (S_3,d_1) , (S_3,d_2) .

- نقوم باختبار أمثلية الحل عن طريق رسم مسار مغلق لكل خلية فارغة، ثم نحسب تكاليفها الحدية كما يلي:

الخلية (S_1,d_3) تدخل إلى الحل← $\sigma_{13} = 12 - 20 + 4 - 8 = -12$

$$\sigma_{21} = 16 - 4 + 8 - 4 = 16$$
$$\sigma_{31} = 0 - 4 + 8 - 4 + 20 - 0 = 20$$
$$\sigma_{32} = 0 - 4 + 20 - 0 = 16$$

ويكون جدول النقل الثاني بعد إجراء التعديل المناسب كما يلي:

من \ إلى	d_1	d_2	d_3	العرض(a_i)
S_1	4 / 320	8	12 / 80	400
S_2	16	4 / 360	20 / 160	520
S_3	0	0	0 / 160	160
الطلب(b_j)	320	360	400	1080

- نختبر أمثلية الحل مرة أخرى عن طريق رسم مسار مغلق لكل خلية فارغة، ثم نحسب تكاليفها الحدية على النحو الآتي:

$$\sigma_{12} = 8 - 12 + 20 - 4 = 12$$
$$\sigma_{21} = 16 - 20 + 12 - 4 = 4$$
$$\sigma_{31} = 0 - 4 + 12 - 0 = 8$$
$$\sigma_{32} = 0 - 4 + 20 - 0 = 16$$

بما أن كل قيم التكاليف الحدية موجبة إذن الحل الذي تم التوصل إليه هو الحل الأمثل، وقيمة التكلفة الإجمالية للنقل هي:

$$Z = 4 \times 320 + 12 \times 80 + 4 \times 360 + 20 \times 160 + 0 \times 160 = 6880$$

ب- حالة الانحلال: تعني بأن عدد المتغيرات الداخلة في أي حل أساسي لا تساوي $m+n-1$، ويمكن أن تحدث هذه الحالة في الحل الأولي أو أي حل محسن بعد الحل الأولي، حيث ينتج عن عدم تحقق الشرط المذكور عدم إمكانية إيجاد المسار المغلق للخلايا الفارغة، ولن نتمكن من حساب قيم u_i وv_j ولا نستطيع بالتالي حساب التكاليف الحدية للخلايا الفارغة، ويتم معالجة هذه المشكلة عن طريق افتراض إحدى الخلايا الفارغة بأنها خلية ممتلئة قيمة x_{ij} فيها تساوي صفر، وهناك مجموعة من الأسس التي تحكم عملية اختيار هذه الخلية من أهمها[61]:

1- اختيار الخلية ذات أقل تكلفة.

2- اختيار الخلية التي قد تساعد في إيجاد قيم u_i و v_j للأسطر والأعمدة كما هو الحال عند استخدام طريقة التوزيع المعدل.

3- اختيار الخلية التي قد تساعد في تكوين زوايا الممرات المغلقة وفقا لمتطلبات طريقتي التوزيع المعدل والمسار المغلق.

لا يوجد هناك قاعدة ثابتة لتفضيل أي من هذه الأسس على غيرها سوى مقدار وطبيعة ملائمتها لمتطلبات الحل، ولا تأخذ هذه الخلية صفة الثبات حيث يمكن تغييرها حسب الحاجة، لذلك فإن عملية الاختيار تصل في بعض الأحيان إلى ما يشبه طريقة التجربة والخطأ.

مثال:

الجدول أدناه يبين المعطيات المتعلقة بالطاقة الإنتاجية والطلب وتكلفة نقل الوحدة الواحدة من مصادر الإنتاج إلى مراكز الطلب الخاصة بمؤسسة معينة.

إلى / من	d_1	d_2	d_3	العرض(a_i)
S_1	10	8	4	140
S_2	12	6	4	100
S_3	2	10	2	20
الطلب(b_j)	100	100	60	120

[61] – محمد أحمد الطراونة وسليمان خالد عبيدات، مرجع سبق ذكره، ص236.

المطلوب:

1-إيجاد الحل الأولي باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

2-إيجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة المسار المغلق.

الحل:

1- الحل الأولي باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية يكون كما يلي:

من \ إلى	d_1	d_2	d_3	العرض(a_i)
S_1	10 100	8 40	4	140
S_2	12	6 60	4 40	100
S_3	2	10	2 20	20
الطلب(b_j)	100	100	60	120

التكلفة الإجمالية هي:

$$Z = 10 \times 100 + 8 \times 40 + 6 \times 60 + 4 \times 40 + 2 \times 20 = 1880$$

نلاحظ أن عدد الخلايا الممتلئة يساوي 5 وهو يحقق الشرط m+n-1، لذلك يمكن إيجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة المسار المغلق.

2- إيجاد الحل الأمثل:

الخلايا الفارغة هي:

$$(S_1,d_3)\ ,\ (S_2,d_1)\ ,\ (S_3,d_1)\ ,\ (S_3,d_2)\ .$$

- نقوم باختبار أمثلية الحل عن طريق رسم مسار مغلق لكل خلية فارغة، ثم نحسب تكاليفها الحدية كما يلي:

$$\sigma_{13} = 4 - 4 + 6 - 8 = -2$$

$$\sigma_{21} = 12 - 10 + 8 - 6 = 4$$

$\sigma_{31} = 2 - 10 + 8 - 6 + 4 - 2 = -4$ ← الخلية (S_3,d_1) تدخل إلى الحل

$$\sigma_{32} = 10 - 6 + 4 - 2 = 6$$

ويكون جدول النقل الثاني بعد إجراء التعديل المناسب كما يلي:

إلى / من	d_1	d_2	d_3	العرض(a_i)
S_1	10 / 80	8 / 60	4	140
S_2	12	6 / 40	4 / 60	100
S_3	2 / 20	10	2	20
الطلب(b_j)	100	100	60	120

- نختبر أمثلية الحل مرة أخرى عن طريق رسم مسار مغلق لكل خلية فارغة، ثم نحسب تكاليفها الحدية على النحو الآتي:

الخلية (S_1,d_3) تدخل إلى الحل $\sigma_{13} = 4 - 4 + 6 - 8 = -2 \leftarrow$

$$\sigma_{21} = 12 - 10 + 8 - 6 = 4$$
$$\sigma_{32} = 10 - 8 + 10 - 2 = 10$$
$$\sigma_{33} = 2 - 2 + 10 - 8 + 6 - 4 = 4$$

ويكون جدول النقل بعد إجراء التعديل المناسب كما يلي:

إلى / من	d_1	d_2	d_3	العرض(a_i)
S_1	10 / 80	8	4 / 60	140
S_2	12	6 / 100	4	100
S_3	2 / 20	10	2	20
الطلب(b_j)	100	100	60	120

نلاحظ من خلال الجدول خروج متغيرين من الحل هما x_{12} وx_{23}، لذا فإن عدد الخلايا الممتلئة يساوي 4 لا يحقق الشرط $m+n-1=5$، وهذا يعني أننا أمام حالة خاصة هي الانحلال، ويتم معالجة هذه المشكلة عن طريق افتراض إحدى الخلايا الفارغة خلية ممتلئة، قيمة x_{ij} فيها تساوي صفر، ويفضل اختيار الخلية ذات التكلفة الأقل ولتكن (S_2,d_3) كما هو مبين في الجدول أدناه:

من \ إلى	d_1	d_2	d_3	العرض(a_i)
S_1	10 / 80	8	4 / 60	140
S_2	12	6 / 100	4 / 0	100
S_3	2 / 20	10	2	20
الطلب(b_j)	100	100	60	120

- يتم اختبار أمثلية الحل مرة أخرى عن طريق رسم مسار مغلق لكل خلية فارغة، ثم نحسب تكاليفها الحدية على النحو الآتي:

$$\sigma_{12} = 8 - 6 + 4 - 4 = 2$$
$$\sigma_{21} = 12 - 10 + 4 - 4 = 2$$
$$\sigma_{32} = 10 - 2 + 0 - 4 + 4 - 6 = 12$$
$$\sigma_{33} = 2 - 2 + 10 - 4 = 6$$

نلاحظ أن جميع قيم التكاليف الحدية موجبة إذن الحل أمثل، وقيمة التكلفة الإجمالية للنقل هي:

$$Z = 10 \times 80 + 4 \times 60 + 6 \times 100 + 4 \times 0 + 2 \times 20 = 1680$$

تمارين محلولة:

التمرين الأول:

تمتلك مؤسسة لصناعة الثلاجات ثلاثة مصانع S_1، S_2، S_3، الطاقة الإنتاجية لكل منها 40 ثلاجة، ترغب الشركة في توزيع إنتاجها من الثلاجات على ثلاثة مراكز تسويق تابعة لها d_1، d_2، d_3، حيث كان حجم الطلب لكل مركز تسويق هو 60، 30، 30، ثلاجة على التوالي، تكلفة نقل الثلاجة الواحدة من S_1 إلى كل من d_1، d_2، d_3 هي 10، 12، 20 وحدة نقدية على التوالي، ومن S_2 إلى كل من d_1، d_2، d_3 هي 18، 24، 16 وحدة نقدية على التوالي، و من S_3 إلى كل من d_1، d_2، d_3 هي 14، 22، 11 وحدة نقدية على التوالي.

المطلوب:

1- تشكيل جدول النقل الخاص بهذه المشكلة.

2- صياغة نموذج البرمجة الخطية لمشكلة النقل.

3- إيجاد الحل الأساسي باستخدام الطرق الثلاثة.

4- بإتباع طريقة المسار المغلق أوجد الحل الأمثل للمشكلة باعتماد طريقة التكلفة الصغرى.

5- بإتباع طريقة التوزيع المعدل أوجد الحل الأمثل للمشكلة باعتماد طريقة التكلفة الصغرى.

الحل:

1- تشكيل جدول النقل:

من \ إلى	d_1	d_2	d_3	العرض (a_i)
S_1	10 x_{11}	12 x_{12}	20 x_{13}	40
S_2	18 x_{21}	24 x_{22}	16 x_{23}	40
S_3	14 x_{31}	22 x_{32}	11 x_{33}	40
الطلب (b_j)	60	30	30	120

2- صياغة نموذج البرمجة الخطية لمشكلة النقل:

❖ **متغيرات القرار:** x_{ij} وتمثل عدد الثلاجات المنقولة من المصانع الثلاث إلى المراكز الثلاث وعددها 9.

❖ **دالة الهدف:**

$$\text{MIN } Z = 10x_{11} + 12x_{12} + 20x_{13} + 18x_{21}$$
$$+24x_{22} + 16x_{23} + 14x_{31} + 22x_{32} + 11x_{33}$$

❖ **القيود:**

-قيود العرض:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 40$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 40$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 40$$

-قيود الطلب:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 60$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 30$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 30$$
$$x_{ij} \geq 0$$

3- إيجاد الحل الأساسي باستخدام الطرق الثلاثة:

أ- طريقة الزاوية الشمالية الغربية:

من \ إلى	d_1	d_2	d_3	العرض(a_i)	باقي	باقي
S_1	$\boxed{10}$ 40	$\boxed{12}$	$\boxed{20}$	40	0	
S_2	$\boxed{18}$ 20	$\boxed{24}$ 20	$\boxed{16}$	40	20	0
S_3	$\boxed{14}$	$\boxed{22}$ 10	$\boxed{11}$ 30	40	30	0
الطلب(b_j)	60	30	30	120		
باقي	20	10	0			
باقي	0	0				

قيمة التكلفة

الإجمالية للنقل هي:

$$Z = 10 \times 40 + 18 \times 20 + 24 \times 20 + 10 \times 22 + 11 \times 30 = 1790$$

نلاحظ أن عدد المتغيرات الداخلة في الحل تساوي 5 وهي تحقق الشرط m+n−1=5.

ب–طريقة التكلفة الصغرى:

باستخدام طريقة التكلفة الصغرى نحصل على جدول الحل الأولي التالي والذي تظهر فيه جميع مراحل إيجاده:

من \ إلى	d_1	d_2	d_3	العرض(a_i)	باقي	باقي
S_1	$\boxed{10}$ 40	$\boxed{12}$	$\boxed{20}$	40	0	
S_2	$\boxed{18}$ 10	$\boxed{24}$ 30	$\boxed{16}$	40	30	0
S_3	$\boxed{14}$ 10	$\boxed{22}$	$\boxed{11}$ 30	40	10	0
الطلب(b_j)	60	30	30	120		
باقي	20	0	0			
باقي	10					
باقي	0					

قيمة التكلفة الإجمالية للنقل هي:

$$Z = 10 \times 40 + 18 \times 10 + 24 \times 30 + 14 \times 10 + 11 \times 30 = 1770$$

نلاحظ أن عدد المتغيرات الداخلة في الحل تساوي 5 وهي تحقق الشرط m+n−1=5.

ج-طريقة فوجل التقريبية:

يبين الجدول التالي خطوات النقل بهذه الطريقة:

من \ إلى	d_1	d_2	d_3	العرض(a_i)	الفرق 1	الفرق 2	الفرق 3
S_1	10 10	12 30	20	40	2	10	/
S_2	18 40	24	16	40	2	2	2
S_3	14 10	22	11 30	40	3	3	3
الطلب(b_j)	60	30	30	120			
الفرق 1	4	10	5				
الفرق 2	4	/	5				
الفرق 3	4	/	5				

قيمة التكلفة الإجمالية للنقل هي:

$$Z = 10 \times 10 + 12 \times 30 + 18 \times 40 + 14 \times 10 + 11 \times 30 = 1650$$

نلاحظ أن عدد المتغيرات الداخلة في الحل تساوي 5 وهي تحقق الشرط m+n-1=5.

4- إيجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة المسار المغلق وباعتماد طريقة التكلفة الصغرى:

جدول النقل باستخدام طريقة التكلفة الصغرى هو:

من \ إلى	d_1	d_2	d_3	العرض(a_i)
S_1	10 40	12	20	40
S_2	18 10	24 30	16	40
S_3	14 10	22	11 30	40
الطلب(b_j)	60	30	30	120

الخلايا الفارغة هي:

$$(S_1,d_2)\ ,\ (S_1,d_3)\ ,\ (S_2,d_3)\ ,\ (S_3,d_2)\ .$$

– نقوم باختبار أمثلية الحل عن طريق رسم مسار مغلق لكل خلية فارغة، ثم نحسب تكاليفها الحدية كما يلي:

$$\sigma_{12} = 12 - 24 + 18 - 10 = -4$$
$$\sigma_{13} = 20 - 11 + 14 - 10 = 13$$
$$\sigma_{23} = 16 - 11 + 14 - 18 = 1$$
$$\sigma_{32} = 22 - 14 + 18 - 24 = 2$$

يتضح مما تقدم أن التكلفة الحدية للخلية (S_1,d_2) سالبة، هذا يعني أن هذه الخلية تساهم في تخفيض التكلفة الإجمالية للنقل لذلك يتم إدخالها للحل، ثم نقوم بإجراء عملية النقل عن طريق مسارها المغلق كما يلي:

(S_1,d_2) →	(S_2,d_2) →	(S_2,d_1) →	(S_1,d_1)	المسار المغلق للخلية (S_1,d_2)
+	30–	10+	40–	قيم الخلايا الممتلئة
30+	30–30=0	10+30=40	40–30=10	قيم الخلايا بعد التعديل

Min(30,40)=30

بعد تنفيذ التعديلات على قيم المسار بإضافة وطرح أصغر قيمة متواجدة على الزوايا التي تحمل الإشارة (–) وهي القيمة 30، نحصل على القيم الجديدة للكميات كما هو مبين في الجدول التالي:

من \ إلى	d_1	d_2	d_3	العرض(a_i)
S_1	10 / 10	12 / 30	20	40
S_2	18 / 40	24	16	40
S_3	14 / 10	22	11 / 30	40
الطلب(b_j)	60	30	30	120

– نختبر أمثلية الحل مرة أخرى عن طريق رسم مسار مغلق لكل خلية فارغة، ثم نحسب تكاليفها الحدية على النحو الآتي:

$$\sigma_{13} = 20 - 11 + 14 - 10 = 13$$
$$\sigma_{22} = 24 - 18 + 10 - 12 = 4$$
$$\sigma_{23} = 16 - 11 + 14 - 18 = 1$$
$$\sigma_{32} = 22 - 14 + 10 - 12 = 6$$

بما أن كل التكاليف الحدية موجبة إذن الحل الذي تم التوصل إليه في الجدول الأخير هو الحل الأمثل، وبذلك تكون أقل تكلفة لنقل السلع من المصادر الثلاث إلى المراكز الثلاث هي:

$$Z = 10 \times 10 + 12 \times 30 + 18 \times 40 + 14 \times 10 + 11 \times 30 = 1650$$

تم تخفيض التكلفة من 1770 وحدة نقدية عند الحل الأولي إلى 1650 وحدة نقدية عند الحل الأمثل، أي بفرق مقداره 120 وحدة نقدية، وهي نفس النتيجة التي تم التوصل إليها باستخدام طريق فوجل التقريبية.

5- إيجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة التوزيع المعدل وباعتماد طريقة التكلفة الصغرى:

باستخدام جدول التكلفة الصغرى نقوم باختبار إذا كان الحل أمثلا أم هو قابل للتحسين، حيث نضع العلاقة $u_i + v_j = c_{ij}$ لجميع الخلايا الممتلئة بافتراض $u_1 = 0$ فنحصل على ما يلي:

$$(S_1,d_1) \rightarrow u_1 + v_1 = 10 \Rightarrow v_1 = 10$$
$$(S_2,d_1) \rightarrow u_2 + v_1 = 18 \Rightarrow u_2 = 8$$
$$(S_2,d_2) \rightarrow u_2 + v_2 = 24 \Rightarrow v_2 = 16$$
$$(S_3,d_1) \rightarrow u_3 + v_1 = 14 \Rightarrow u_3 = 4$$
$$(S_3,d_3) \rightarrow u_3 + v_3 = 11 \Rightarrow v_3 = 7$$

نقوم بحساب التكلفة الحدية لكل خلية فارغة وفقا للعلاقة $\sigma_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ ، فنحصل على:

$$(S_1,d_2) \rightarrow \sigma_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 12 - 0 - 16 = -4$$
$$(S_1,d_3) \rightarrow \sigma_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 20 - 0 - 7 = 13$$
$$(S_2,d_3) \rightarrow \sigma_{23} = c_{23} - u_2 - v_3 = 16 - 8 - 7 = 1$$
$$(S_3,d_2) \rightarrow \sigma_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 22 - 4 - 16 = 2$$

يتضح مما تقدم أن التكلفة الحدية للخلية (S_1,d_2) سالبة، هذا يعني أن هذه الخلية تساهم في تخفيض التكلفة الإجمالية للنقل لذلك يتم إدخالها للحل، وتنظيم مسارها المغلق كما يلي:

من \ إلى	d_1	d_2	d_3	العرض (a_i)
S_1	10 40	12	20	40
S_2	18 10	24 30	16	40
S_3	14 10	22	11 30	40
الطلب (b_j)	60	30	30	120

بعد تنفيذ التعديلات على قيم المسار وذلك بإضافة وطرح أصغر قيمة متواجدة على الزوايا التي تحمل الإشارة (-) وهي القيمة 30، نحصل على القيم الجديدة للكميات كما هو مبين في الجدول التالي:

من \ إلى	d_1	d_2	d_3	العرض (a_i)
S_1	10 10	12 30	20	40
S_2	18 40	24	16	40
S_3	14 10	22	11 30	40
الطلب (b_j)	60	30	30	120

من أجل التحقق أن الحل أمثل يتم إعادة الحل مرة أخرى بإيجاد قيم كل من u_i و v_j بافتراض أن قيمة u_1 تساوي صفر باستخدام الخلايا الممتلئة، وإيجاد التكلفة الحدية لكل خلية فارغة على النحو التالي:

الخلايا الممتلئة:

$$(S_1,d_1) \rightarrow u_1 + v_1 = 10 \Rightarrow v_1 = 10$$
$$(S_1,d_2) \rightarrow u_1 + v_2 = 12 \Rightarrow v_2 = 12$$
$$(S_2,d_1) \rightarrow u_2 + v_1 = 18 \Rightarrow u_2 = 8$$
$$(S_3,d_1) \rightarrow u_3 + v_1 = 14 \Rightarrow u_3 = 4$$
$$(S_3,d_3) \rightarrow u_3 + v_3 = 11 \Rightarrow v_3 = 7$$

التكلفة الحدية للخلايا الفارغة:

$$(S_1,d_3) \rightarrow \sigma_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 20 - 0 - 7 = 13$$
$$(S_2,d_2) \rightarrow \sigma_{22} = c_{22} - u_2 - v_2 = 24 - 8 - 12 = 4$$
$$(S_2,d_3) \rightarrow \sigma_{23} = c_{23} - u_2 - v_3 = 16 - 8 - 7 = 1$$
$$(S_3,d_2) \rightarrow \sigma_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 22 - 4 - 12 = 6$$

بما أن كل التكاليف الحدية موجبة إذن الحل الذي تم التوصل إليه في الجدول الأخير هو الحل الأمثل، وبذلك تكون أقل تكلفة لنقل السلع من المصادر الثلاث إلى المراكز الثلاث هي:

$$Z = 10 \times 10 + 12 \times 30 + 18 \times 40 + 14 \times 10 + 11 \times 30 = 1650$$

التمرين الثاني:

مؤسسة لها ثلاثة مصانع مكلفة بتموين ثلاثة مخازن في جهات متباعدة، إذا علمت أن كميات عرض كل مصنع وطاقات استقبال كل مخزن، وتكاليف نقل الوحدة الواحدة من كل مصنع إلى كل مخزن مبينة في الجدول أدناه:

إلى / من	d_1	d_2	d_3	العرض (a_i)
S_1	1	2	3	60
S_2	5	6	7	20
S_3	9	8	4	30
الطلب (b_j)	50	50	30	110 130

المطلوب:

-أوجد أفضل خطة للنقل بطريقة التكلفة الصغرى وأسلوب التوزيع المعدل.

الحل:

نلاحظ أن مجموع العرض أقل من مجموع الطلب لذلك نضيف مصدر وهمي بعرض قيمته 20، وبتكاليف نقل صفرية مثلما يوضحه الجدول التالي:

من \ إلى	d_1	d_2	d_3	العرض(a_i)
S_1	1	2	3	60
S_2	5	6	7	20
S_3	9	8	4	30
S_4	0	0	0	20
الطلب(b_j)	50	50	30	130

باستخدام طريقة التكلفة الصغرى نحصل على جدول الحل الأساسي أدناه والذي تظهر فيه مختلف مراحل إيجاده، لعل ما يلفت الانتباه أنه عند الوصول إلى الخلية (S_3,d_3) نجد أن السطر والعمود يتشبعان في آن واحد (يتم تلبية احتياجات المركز 3 ونفاذ الكمية المتاحة في المصدر 3 في نفس الوقت، وبالتالي عدد الخلايا الممتلئة -يساوي 5- لا يحقق الشرط $m+n-1$ -يساوي 6 -)، وهي حالة تقودنا إلى انحلال الحل لذلك يجب تشبيع سطر أو عمود فقط، ومنه نفترض إحدى الخلايا الفارغة خلية ممتلئة قيمة x_{ij} فيها تساوي صفر، نختار الخلية (S_3,d_2) وبذلك يكون عدد الخلايا الممتلئة يساوي 6 كما هو مبين في الجدول التالي:

من \ إلى	d_1	d_2	d_3	العرض(a_i)	باقي	باقي
S_1	1 50	2 10	3	60	10	0
S_2	5	6 20	7	20	0	
S_3	9	8 0	4 30	30	0	0
S_4	0	0 20	0	20	0	
الطلب(b_j)	50	50	30	130		
باقي	0	30	0			
باقي		20				
باقي		0				

نختبر الحل إذا كان أمثلا أم هو قابل للتحسين بطريقة التوزيع المعدل:

نضع العلاقة $u_i + v_j = c_{ij}$ لجميع الخلايا الممتلئة بافتراض $u_1 = 0$ فنحصل على ما يلي:

$$(S_1,d_1) \rightarrow u_1 + v_1 = 1 \Rightarrow v_1 = 1$$

$$(S_1,d_2) \rightarrow u_1 + v_2 = 2 \Rightarrow v_2 = 2$$

$$(S_2,d_2) \rightarrow u_2 + v_2 = 6 \Rightarrow u_2 = 4$$

$$(S_3,d_2) \rightarrow u_3 + v_2 = 8 \Rightarrow u_3 = 6$$

$$(S_3,d_3) \rightarrow u_3 + v_3 = 4 \Rightarrow v_3 = -2$$

$$(S_4,d_2) \rightarrow u_4 + v_2 = 0 \Rightarrow u_4 = -2$$

نقوم بحساب التكلفة الحدية لكل خلية فارغة وفقا للعلاقة $\sigma_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ ، فنحصل على:

$(S_1,d_3) \rightarrow\ \sigma_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 3 - 0 + 2 = 5$

$(S_2,d_1) \rightarrow\ \sigma_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 5 - 4 - 1 = 0$

$(S_2,d_3) \rightarrow\ \sigma_{23} = c_{23} - u_2 - v_3 = 7 - 4 + 2 = 5$

$(S_3,d_1) \rightarrow\ \sigma_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 9 - 6 - 1 = 2$

$(S_4,d_1) \rightarrow\ \sigma_{41} = c_{41} - u_4 - v_1 = 0 + 2 - 1 = 1$

$(S_4,d_3) \rightarrow\ \sigma_{43} = c_{43} - u_4 - v_3 = 0 + 2 + 2 = 4$

بما أن كل التكاليف الحدية موجبة إذن الحل الذي تم التوصل إليه هو الحل الأمثل، ويكون بذلك جدول الحل الأمثل كما يلي:

إلى / من	d_1	d_2	d_3	العرض(a_i)
S_1	1 50	2 10	3	60
S_2	5	6 20	7	20
S_3	9	8 0	4 30	30
S_4	0	0 20	0	20
الطلب(b_j)	50	50	30	130

إذن أقل تكلفة للنقل هي:

$$Z = 1 \times 50 + 2 \times 10 + 6 \times 20 + 8 \times 0 + 4 \times 30 + 0 \times 20 = 310$$

تمارين للحل

التمرين الأول:

يقوم الديوان الوطني للتمور بتسويق نوع من أنواع التمور انطلاقا من ثلاثة موانئ رئيسية إلى ثلاثة دول، حيث أن الكميات الممكن تصديرها حسب الموانئ هي:

-ميناء الجزائر: الكميات الممكن تصديرها عبره هي 80 طن.

-ميناء وهران: الكميات الممكن تصديرها عبره هي 40 طن.

-ميناء عنابة: الكميات الممكن تصديرها عبره هي 60 طن.

أما كميات الطلب لكل دولة فهي:

-الولايات المتحدة الأمريكية: حجم الطلب هو 70 طن.

-كندا: حجم الطلب هو 70 طن.

-استراليا: حجم الطلب هو 40 طن.

تكلفة نقل القنطار الواحد من التمور بالدولار الأمريكي من كل ميناء إلى كل دولة مستوردة موضحة في الجدول التالي:

	و م أمريكية	كندا	أستراليا
ميناء الجزائر	5	6	7
ميناء وهران	9	5	11
ميناء عنابة	13	12	8

إذا كان الديوان هو الذي يتولى نقل المنتوج إلى الدول المستوردة وهدفه هو تصدير منتجاته بأقل تكلفة ممكنة.

المطلوب:

1- أكتب البرنامج الرياضي للمسألة.

2- إذا خصص لكل كمية منقولة من كل ميناء إلى كل دولة باخرة واحدة ما هو عدد البواخر المتوقع تصديره لنقل هذه الكميات، وضح.

3- أوجد الحل الأساسي بالطرق الثلاث، وأحسب التكلفة الإجمالية عند كل حل.

4- انطلاقا من جدول الحل الأساسي الأول المحصل عليه من كل طريقة، أوجد الحل الأمثل بطريقتي المسار المغلق والتوزيع المعدل.

التمرين الثاني:

الجدول التالي يبين معطيات متعلقة بالطاقة الإنتاجية، والطلب وتكلفة نقل الوحدة الواحدة من مصادر الإنتاج إلى مراكز الطلب الخاصة بمؤسسة للصناعات الكهربائية.

إلى / من	d_1	d_2	d_3	العرض(a_i)
S_1	10	4	11	70
S_2	12	5	8	50
S_3	9	7	6	80
الطلب(b_j)	40	50	60	

المطلوب:

- صياغة نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة.
- إيجاد الحل الأولي باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية.
- إيجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة المسار المغلق.

التمرين الثالث:

إليك شبكة النقل التالية:

إلى / من	d_1	d_2	d_3	d_4	العرض (a_i)
S_1	10	0	20	11	15
S_2	12	7	9	20	25
S_3	0	14	16	18	5
الطلب(b_j)	5	15	15	10	

المطلوب:

- أوجد الحلول المثلى بانتهاج جميع الطرق.

قائمة المراجع

قائمة المراجع:

1- إبراهيم نائب، إنعام باقية، **بحوث العمليات – خوارزميات وبرامج حاسوبية–**، دار وائل للنشر والتوزيع، الأردن، 1999.

2- أبو القاسم مسعود الشيخ، **بحوث العمليات**، المجموعة العربية للتدريب والنشر، مصر، ط2، 2014.

3- أحمد عبد إسماعيل الصفار، مجدة عبد اللطيف التميمي، بحوث العمليات تطبيقات على الحاسوب، دار المناهج، الأردن،2007.

4- أكرم محمد عرفان المهتدي، **الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية**، دار الصفاء للنشر والتوزيع، الأردن، 2004.

5-بوقرة رابح، **بحوث العمليات**، مؤسسة شباب الجامعة، مصر، 2009.

6- جمال عبد العزيز ناصر، **بحوث العمليات في المحاسبة**، جامعة القاهرة، مصر، 2009.

7- جهاد صياح بني هاني، **بحوث العمليات والأساليب الكمية نظرية وتطبيق**، دار جليس الزمان، الأردن، 2009.

8- حامد سعد نور الشمرتي، **بحوث العمليات مفهوما وتطبيقا**، مكتبة الذاكرة ، العراق، 2010.

9- حسن ياسين طعمة وآخرون، **بحوث العمليات نماذج وتطبيقات**، دار الصفاء للنشر والتوزيع، الأردن، 2009.

10- حسين محمود الجنابي، **الأحدث في بحوث العمليات**، دار الحامد، الأردن، 2010.

11-دلال صادق الجواد، حميد ناصر القتال، **بحوث العمليات**، دار اليازوري العلمية، الأردن، 2008.

12- صالح مهدي محسن العامري وعواطف إبراهيم الحداد، **تطبيقات بحوث العمليات في الإدارة**، إثراء للنشر والتوزيع، الأردن، 2009.

13- فتحي خليل حمدان، **بحوث العمليات مع تطبيقات باستخدام الحاسوب**، دار وائل، الأردن، 2010.

14- لحسن عبد الله باشيوة، **بحوث العمليات**، دار اليازوري العلمية، الأردن، 2011.

15- محمد أحمد الطراونة وسليمان خالد عبيدات، **مقدمة في بحوث العمليات**، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة، الأردن، الطبعة الثانية،2010

16- محمد راتول، **بحوث العمليات**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، ط 4، 2011.

17- محمد سالم الصفدي، **بحوث العمليات تطبيق وخوارزميات**، دار وائل للنشر،الأردن، 1999.

18- محمد عبد العال النعيمي وآخرون، **بحوث العمليات**، دار وائل للنشر،الأردن، الطبعة الثانية، 2011.

19- محمد محمد كعبور، **أساسيات بحوث العمليات نماذج وتطبيقات**، منشورات أكاديمية الدراسات العليا، ليبيا، 2005.

20- مكيد علي، **بحوث العمليات وتطبيقاتها الاقتصادية**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2015.

21- منعم زمزير الموسوي، **بحوث العمليات -مدخل علمي لاتخاذ القرارات-**، دار وائل للنشر والتوزيع، الأردن، 2009.